COURS

D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS

D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Par M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

PRÉFACE.

Cette nouvelle édition de notre *Cours d'Analyse* diffère beaucoup de la précédente. Nous laisserons de côté les modifications secondaires, pour indiquer brièvement les principaux changements introduits :

Les élèves entrant à l'École Polytechnique étant déjà familiers avec les fonctions élémentaires, nous avions supposé celles-ci connues d'avance. Cependant leur étude suppose des notions de Calcul infinitésimal; nous avons donc jugé à propos de leur donner une place dans cette seconde édition.

Cette étude ne peut d'ailleurs se faire d'une manière complète que par l'introduction des imaginaires; d'où la nécessité de définir les fonctions de variables complexes, leurs branches, leurs points critiques, etc.

Bien que le présent Volume ait pour objet principal le Calcul différentiel, nous avons, suivant l'exemple d'autres Auteurs, placé dès le début la définition et les propriétés fondamentales des intégrales définies, simples ou multiples, lorsqu'on peut les considérer comme limites de sommes. De cette façon, les notions fondamentales du Calcul infinité-

simal se trouvent à peu près toutes réunies dans les trois premiers Chapitres de ce Volume.

Dans la précédente édition, où nous tenions à conserver toute la simplicité possible, nous avions glissé un peu rapidement sur ces premiers principes, qui ont été récemment l'objet d'études approfondies de la part des géomètres les plus éminents. Notre but actuel est un peu différent : nous les exposons avec toute la précision et la généralité que nous avons pu, dût-il en résulter quelque complication.

Certains points présentent encore quelque obscurité. Pour en citer un exemple, nous n'avons pu arriver à définir d'une manière satisfaisante l'aire d'une surface gauche, que dans le cas où la surface a un plan tangent, variant suivant une loi continue.

Enfin nous avons complètement remanié le dernier Chapitre, sur les courbes planes algébriques, pour y introduire les résultats principaux des recherches de MM. Cremona, Halphen et Nöther.

C. Jordan.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

VARIABLES RÉELLES.

I. — *Limites.*

II. — *Ensembles.*

III. — *Fonctions bornées. — Fonctions intégrables.*

IX. — *Fonctions élémentaires.*

X. — *Dérivées et différentielles d'ordre supérieur.*

XI. — *Changements de variables.*

XII. — *Changements de variables dans les intégrales définies.*

XIII. — *Formation des équations différentielles.*

CHAPITRE II.

VARIABLES COMPLEXES.

I. — *Fonctions synectiques.*

II. — *Intégrales des fonctions synectiques.*

III. — *Fonctions rationnelles.*

IV. — *Fonctions algébriques.*

V. — *Transcendantes élémentaires.*

CHAPITRE III.

SÉRIES.

I. — *Formule de Taylor.*

II. — *Procédés pour effectuer les développements en série.*

III. — *Séries et produits infinis à termes numériques.*

IV. — *Séries de fonctions.*

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

I. — *Points ordinaires et points singuliers.*

II. — *Théorie du contact.*

III. — *Enveloppes.*

IV. — *Courbes planes.*

V. — *Géométrie infinitésimale.*

VI. — *Courbes gauches et surfaces développables.*

VII. — *Systèmes de droites.*

VIII. — *Surfaces.*

IX. — *Coordonnées curvilignes.*

CHAPITRE V.

COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

I. — *Coordonnées homogènes.*

II. — *Cycles.*

III. — *Transformations birationnelles du plan.*

IV. — *Transformations birationnelles d'une courbe.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pages	Lignes	*au lieu de*	*lisez*
24	6	p	π
43	11	rectangles	parties communes à E et aux rectangles
52	29	toute valeur	pour toute valeur
70	9 et 11	Δx	ΔX
79	27	$\frac{\partial f}{\partial y} dx$	$\frac{\partial f}{\partial y} dy$
80	31	$n+1$	$m+1$
114	19	comme	x comme
135	5	δ	δ_k

Pages	Lignes	*au lieu de*	*lisez*
143	21	v_k	ν_k
144	23	(u, v)	(t, u, v)
144	24	(x, y)	(x, y, z)
188	31	BC	AC
199	11	$(z)\|$	$\|P(z)\|$
204	22	une puissance u	une puissance
225	13	u^0	u^q
240	23	$iz + \sqrt{1 - z^2}$ étant	$iz - \sqrt{1 - z^2}$ étant
242 et 243	passim	$\frac{2k+1}{2}\pi$	$\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$
262	16	$y = e^x$	$y = 1 + e^x$
276	11	$v_{i,m+1}\| + \ldots + \|v_{i,m+p}$	$\|v_{i,m+1}\| + \ldots + \|v_{i,m+p}\|$
288	21	$> r$	$< r$
300	5	n'	n
318	22	n'est bornée	n'a une variation bornée
344	2	φ_1	φ_i
Id.	3	ou	où
346	22	$(u_1, z^{\frac{1}{q}})$	$z^\lambda S_1(u, z^{\frac{1}{q}})$
358	22	[illegible]	$=$
363	22	$F(\alpha, \beta, \gamma, +1, x)$	$F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x)$
374	20	x_2	x^2
379	20	$f(a + h', b + k', \ldots)$	$f(a + h, b + k, \ldots)$
384	7	un ordre	d'un ordre
394	3	x_1	x
416	5	aux n points	aux points
439	28	$\left[\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$	$\left[\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right]'$
467	21	En outre, δ étant nul	En outre,
574	10	$yz' - zx'$	$yz' - zy'$
596	2	$c\frac{\partial f_1}{\partial z_0} + \ldots$	$c\frac{\partial f_1}{\partial z_0}, \ldots$
600	6 et 7	Ap	à p

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.
CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.
VARIABLES RÉELLES.

I. — Limites.

1. L'objet primitif de l'Arithmétique est l'étude des nombres entiers.

Pour pouvoir exécuter, dans tous les cas, la résolution des équations du premier degré, on a dû étendre cette première conception, par l'introduction des nombres négatifs et des nombres fractionnaires. On obtient ainsi l'ensemble des nombres rationnels.

La résolution des équations de degré > 1 exige de nouvelles généralisations. Les principes sur lesquels elles reposent sont intimement liés à ceux du Calcul infinitésimal, et nous devons les exposer brièvement.

2. Nombres irrationnels. — Soient A et B deux systèmes de nombres rationnels jouissant des propriétés suivantes :

1° *Tout nombre de* B *est plus grand que tout nombre de* A;

2° *On peut toujours déterminer dans* A *et* B *respectivement deux nombres* a *et* b, *tels que l'on ait*

$$b - a < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre positif ε, donné *a priori*.

Ces hypothèses admises, les nombres (rationnels) pourront se répartir en trois classes :

La première $\mathcal{A}$ contiendra tous les nombres inférieurs à quelqu'un des nombres de A; la seconde $\mathcal{B}$ tous les nombres supérieurs à quelque nombre de B; la troisième $\mathcal{C}$, ceux qui ne sont ni inférieurs à un nombre A, ni supérieurs à un nombre B.

Il est impossible que cette classe $\mathcal{C}$ contienne deux nombres différents c et $c' < c$. On aurait, en effet, quel que fût le choix de a et de b,

$$a \leqq c', \quad b \geqq c, \qquad \text{d'où} \qquad b - a \geqq c - c',$$

résultat contraire à notre seconde hypothèse.

Elle peut contenir un nombre unique c (ce cas se présentera, par exemple, si l'on prend pour A l'ensemble des nombres $< c$, et pour B l'ensemble des nombres $> c$).

Mais il peut arriver aussi qu'elle n'en contienne aucun (on sait qu'il en sera ainsi si l'on prend pour A la suite des réduites de rang impair, pour B celle des réduites de rang pair d'une fraction continue illimitée).

Nous ferons disparaître cette distinction, en disant que, dans le second cas, il existe encore un nombre c plus grand que tous les $\mathcal{A}$ et plus petit que tous les $\mathcal{B}$, mais que ce nombre est *irrationnel*.

L'ensemble des nombres ainsi obtenus, tant rationnels qu'irrationnels, constitue le système des nombres *réels*.

Chacun de ces nombres est défini, comme on le voit, par la connaissance des nombres rationnels qui sont plus petits que lui, et de ceux qui sont, au contraire, plus grands que lui.

3. Si un nombre rationnel r est plus petit (plus grand) qu'un nombre réel c, il est clair, d'après nos définitions, que tout nombre rationnel r' plus petit (plus grand) que r sera *a fortiori* plus petit (plus grand) que c.

Mais on peut démontrer qu'*il existe, en outre, une infinité de nombres rationnels compris dans l'intervalle de r à c.*

En effet, si c est rationnel, tous les nombres $r + m(c - r)$, où m est une fraction quelconque comprise entre 0 et 1, satisfont à cette condition.

Si c est irrationnel, supposons, pour fixer les idées, $c > r$. Soient A, B les deux systèmes de nombres rationnels qui déterminent c. Tout nombre rationnel appartient, par hypothèse, à l'une des deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, définies comme ci-dessus.

Le nombre $r < c$ appartient à la classe $\mathcal{A}$. Il est donc moindre qu'un nombre a du système A. Ce nombre a étant plus petit que tous les B n'appartient pas à la classe $\mathcal{B}$: c'est donc un nombre $\mathcal{A}$. Donc il est moindre qu'un autre nombre a_1 du système A. Continuant ainsi, on obtiendra une suite infinie de nombres rationnels croissants $r, a, a_1, \ldots$, et tous $< c$.

On dira qu'un nombre réel c est *plus grand* qu'un autre nombre réel c', s'il existe un nombre rationnel r qui soit $< c$ et $> c'$. Dans ce cas, tous les nombres rationnels, en nombre infini, compris entre c et r, ou entre r et c', jouiront de la même propriété.

Il est clair que, si $c > c'$ et $c' > c''$, on aura $c > c''$.

Enfin, *entre deux nombres rationnels quelconques r et $r + \varepsilon$, il existe nécessairement un nombre irrationnel* (et, par suite, une infinité).

Soit, en effet, c un nombre irrationnel défini par les deux systèmes de nombres rationnels A et B. On peut déterminer dans ces systèmes deux nombres a et b, dont la différence soit $< \varepsilon$, et comprenant entre eux le nombre c.

Soient A_1, B_1 les deux systèmes obtenus en ajoutant la constante $r - a$ à tous les nombres de A et de B. Il est évident que ces nouveaux systèmes ont les qualités requises pour définir un nouveau nombre irrationnel, compris entre r et $r + \varepsilon$.

Un nombre réel c sera dit *positif*, s'il est > 0 (auquel cas il sera encore supérieur à une infinité de nombres rationnels positifs); *négatif*, s'il est < 0.

Les inégalités

$$b - a > 0, \qquad b - a < \varepsilon$$

pouvant s'écrire ainsi

$$(-a) - (-b) > 0, \quad (-a) - (-b) < \varepsilon,$$

on voit qu'à tout nombre réel c, défini par le système des nombres a et celui des nombres b, correspond un autre nombre de signe opposé, défini par le système des nombres $-b$ et celui des nombres $-a$. Nous désignerons ce nombre par $-c$. On aura, d'après cette définition,

$$-(-c) = c.$$

4. Il nous reste à généraliser la définition des opérations de l'Arithmétique, pour les rendre applicables à tout nombre réel.

Soient c, c' deux semblables nombres, définis respectivement par les systèmes A, B; A', B'. Soient a, b; a', b' des nombres pris respectivement dans ces systèmes, on aura

$$b + b' > a + a'.$$

Mais, d'autre part, on pourra choisir a, b, a', b' de telle sorte qu'on ait

$$b - a < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad b' - a' < \frac{\varepsilon}{2};$$

d'où

$$b + b' - (a + a') < \varepsilon.$$

Le système des nombres $a+a'$ et celui des nombres $b+b'$ définiront donc un nombre réel, que nous appellerons $c+c'$.

De même, le système des nombres $b-a'$ et celui des nombres $a-b'$ définiront un nombre, que nous appellerons $c-c'$.

On a évidemment, d'après cette définition,

$$c+c'=c'+c, \qquad c-c'=c+(-c').$$

La soustraction est d'ailleurs l'opération inverse de l'addition, de telle sorte que le nombre $(c-c')+c'=c_1$ n'est autre que c. Pour le montrer, nous prouverons que tout nombre rationnel $>c$ est $>c_1$, et réciproquement.

Les nombres $>c$ sont ceux qui sont plus grands que l'un des nombres b, les nombres $>c_1$ ceux qui sont plus grands que l'un des nombres $b-a'+b'$.

Or, tout nombre $x>b-a'+b'$ est *a fortiori* $>b$, car $b'>a'$.

D'autre part, si $x>c$, on pourra déterminer entre x et c une infinité de nombres rationnels encore $>c$. Soit $x-\varepsilon=b$ l'un d'eux ; on aura

$$x>b-a'+b',$$

si l'on choisit a' et b' de telle sorte que $b'-a'$ soit $<\varepsilon$.

5. Pour définir la multiplication et la division, nous supposerons d'abord c et c' positifs.

Soient α, α' des nombres fixes choisis d'avance arbitrairement parmi les nombres positifs contenus dans les systèmes A, A'; β, β' des nombres fixes (nécessairement positifs) choisis d'avance dans les systèmes B, B'; a, b, a', b' des nombres positifs à choisir dans ces mêmes systèmes; on aura toujours

$$bb'>aa', \qquad \frac{b}{a'}>\frac{a}{b'}.$$

Mais on peut choisir ces nombres de telle sorte que l'on ait

$$b - a < \delta, \qquad b' - a' < \delta,$$

δ étant une quantité à déterminer ultérieurement.

Il est d'ailleurs permis de supposer, en outre, que a et b sont contenus dans l'intervalle de α à β, a' et b' dans l'intervalle de α' à β'. En effet, a, par exemple, est sûrement $< \beta$. S'il est $< \alpha$, on aura $b - \alpha < b - a < \delta$. On pourrait donc substituer α à a, tout en maintenant l'inégalité demandée.

Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} bb' - aa' &< (a + \delta)(a' + \delta) - aa' \\ &< (a + a')\delta + \delta^2 < (\beta + \beta')\delta + \delta^2, \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a'} - \frac{a}{b'} = \frac{bb' - aa'}{a'b'} < \frac{(\beta + \beta')\delta + \delta^2}{\alpha'^2}.$$

Si donc on détermine δ de manière à satisfaire à la fois aux inégalités

$$\delta < 1, \qquad \delta < \frac{\varepsilon}{\beta + \beta' + 1}, \qquad \delta < \frac{\alpha'^2 \varepsilon}{\beta + \beta' + 1},$$

on aura

$$bb' - aa' < (\beta + \beta' + 1)\delta < \varepsilon,$$

$$\frac{b}{a'} - \frac{a}{b'} < \frac{(\beta + \beta' + 1)\delta}{\alpha'^2} < \varepsilon.$$

Le système des nombres aa', joint à celui des nombres bb', et le système des nombres $\frac{a}{b'}$, joint à celui des nombres $\frac{b}{a'}$, définissent donc deux nombres réels, que nous désignerons respectivement par cc' et $\frac{c}{c'}$.

La division ainsi définie est l'inverse de la multiplication. Pour l'établir, il faut prouver l'identité des deux nombres $\frac{c}{c'}c' = c_1$ et c, en montrant que les nombres rationnels supérieurs à l'un le sont à l'autre, et réciproquement.

Soit x un nombre $> c_1$. Il sera, par définition, plus grand

qu'un des nombres $\frac{b}{a'}b'$, et, *a fortiori*, plus grand que le nombre b; il sera donc $> c$.

Réciproquement, si $x > c$, il existera un autre nombre rationnel $x - \varepsilon$ encore plus grand que c, c'est-à-dire plus grand qu'un nombre b. Or on peut déterminer, quel que soit δ, a' et b', de telle sorte que l'on ait $b' < a' + \delta$, d'où

$$\frac{b}{a'}b' < b + \frac{b\delta}{a'} < b + \frac{\beta\delta}{\alpha'}.$$

Si l'on choisit δ moindre que $\frac{\alpha'\varepsilon}{\beta}$, on aura $x > \frac{b}{a'}b'$. Donc $x > c_1$.

Pour étendre la définition de la multiplication et de la division au cas où l'un des facteurs, ou tous les deux, sont négatifs, on appliquera la règle des signes. Enfin on admet qu'un produit est nul, si l'un des facteurs est nul.

On voit, sans aucune difficulté, que les opérations ainsi généralisées, appliquées à des nombres rationnels, donnent les mêmes résultats que les opérations ordinaires, et que les règles du calcul algébrique subsistent sans aucun changement.

6. On nomme *valeur absolue* ou *module* d'un nombre réel c ce nombre lui-même, s'il est positif, le nombre $-c$, si c est négatif. Ce module se désigne souvent par la notation $|c|$.

On a évidemment

$$|a|\,|b| = |ab|,$$
$$|a| - |b| - |c| \leqq |a \pm b \pm c| \leqq |a| + |b| + |c|.$$

7. Soient A, B deux systèmes de nombres réels tels : 1° que tout nombre B soit plus grand que tout nombre A; 2° qu'on puisse toujours déterminer dans A et B deux nombres a et b tels que $b - a$ soit $< \varepsilon$. Il existera un nombre réel unique c tel que l'on ait constamment

$$b \geqq c \geqq a.$$

Soient, en effet, A' le système des nombres rationnels

inférieurs à l'un au moins des nombres A; B' le système des nombres rationnels supérieurs à l'un au moins des nombres B. Les nombres B' seront plus grands que les nombres A'.

D'autre part, déterminons dans A et B deux nombres a et b tels que $b - a < \frac{\varepsilon}{3}$. On peut déterminer deux nombres rationnels comprenant a et dont la différence soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. Le plus petit a' de ces deux nombres appartient à A', et l'on a

$$a - a' < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut de même déterminer dans B' un nombre b' tel que $b' - b$ soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. On aura, par suite,

$$b' - a' < \varepsilon.$$

Les systèmes A', B' étant formés de nombres rationnels déterminent un nombre réel c plus grand que tous les a' et moindre que les b'. Ce nombre satisfait aux conditions requises. En effet, s'il était moindre qu'un nombre a de A, il existerait entre a et c des nombres rationnels a' plus grands que c, contrairement à la définition de c. S'il était plus grand qu'un nombre b de B, on arriverait à une contradiction analogue.

On voit d'ailleurs, comme au n° 2, que le nombre c est unique de son espèce.

8. Limites. — Soit x une quantité variable, à laquelle on donne successivement une suite illimitée de valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ On dit que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, ou, d'une manière plus abrégée, la variable x *tend* ou *converge* vers la *limite* c si, pour toute valeur de la quantité positive ε, on peut assigner un entier ν, tel que l'on ait

$$|x_n - c| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à ν.

La variable x ne peut tendre à la fois vers deux limites différentes c et c'; car on a

$$c' - c = (x_n - c) - (x_n - c'),$$

d'où

$$|c' - c| \overline{\gtrless} |x_n - c| + |x_n - c'|.$$

Donc, quel que soit n, l'un au moins des deux modules

$$|x_n - c|, \quad |x_n - c'|$$

sera au moins égal à $\frac{1}{2}|c' - c|$.

Il importe de transformer la définition précédente, de manière à pouvoir prouver l'existence d'une limite, lors même qu'on ne serait pas en mesure de la déterminer.

9. Théorème. — *Pour que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tende vers une limite, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres positifs non croissants, ayant pour limite zéro, et tels que l'on ait, pour toutes les valeurs des entiers n et p,*

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

1° Supposons, en effet, que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tende vers une limite c. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants ayant zéro pour limite. On pourra, par hypothèse, déterminer pour chaque valeur de m un entier ν_m tel que l'on ait constamment, dès que n est $> \nu_m$,

$$|x_n - c| < \tfrac{1}{2}\delta_m$$

et, par suite,

$$|x_n - x_{n+p}| \overline{\gtrless} |x_n - c| + |x_{n+p} - c| \overline{\gtrless} \delta_m.$$

Si $n \overline{\gtrless} \nu_1$, mais $n + p > \nu_1$, on aura d'autre part

$$|x_n - x_{n+p}| \overline{\gtrless} |x_n - c| + |x_{n+p} - c| \overline{\gtrless} e + \tfrac{1}{2}\delta_1,$$

e désignant la plus grande des quantités $|x_1 - c|, \ldots, |x_{\nu_1} - c|$.

Enfin, si n et $n+p$ ne sont ni l'un ni l'autre $> \nu_1$, on aura

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| < 2e.$$

Définissons maintenant une suite de quantités positives $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ par les relations

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n = 2e + \delta_1, &&\text{si } n \leqq \nu_1, \\ &e_n = \delta_m, &&\text{si } \nu_m < n \leqq \nu_{m+1}. \end{aligned}$$

On aura constamment

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq \varepsilon_n.$$

D'ailleurs les quantités ε_n forment une suite non croissante, et ε_n tend vers zéro quand n tend vers ∞. Car on peut prendre m de telle sorte que δ_m soit moindre qu'une quantité quelconque ε, et il suffira de prendre ensuite $n > \nu_m$ pour être sûr d'avoir

$$\varepsilon_n \leqq \delta_m < \varepsilon.$$

2° Réciproquement, supposons qu'on ait pu déterminer une suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres positifs ayant pour limite zéro, et tels que l'on ait, au moins pour les valeurs de n qui surpassent un nombre fixe m,

$$(1) \qquad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

et proposons-nous de démontrer que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tend vers une limite.

Désignons par a_ν la plus grande des quantités

$$x_{m+1} - \varepsilon_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_\nu - \varepsilon_\nu;$$

par b_ν la plus petite des quantités

$$x_{m+1} + \varepsilon_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_\nu + \varepsilon_\nu;$$

on aura évidemment

$$a_\nu \geqq a_\mu, \qquad b_\nu \leqq b_\mu, \qquad \text{si } \nu > \mu.$$

D'autre part, l'inégalité (1) peut s'écrire

$$-\varepsilon_n < x_n - x_{n+p} < \varepsilon_n,$$

d'où

$$x_n - \varepsilon_n < x_{n+p} < x_n + \varepsilon_n.$$

Supposons $n \overline{\overline{<}} \nu$ et changeons dans cette équation p en $p + \nu - n$; elle devient

$$x_n - \varepsilon_n < x_{\nu+p} < x_n + \varepsilon_n,$$

et comme elle a lieu pour les valeurs $n = m + 1, \ldots, \nu$, on en déduit

$$a_\nu < x_{\nu+p} < b_\nu.$$

Plus généralement, μ et ν étant deux entiers positifs quelconques $> m$, et λ le plus grand des deux, on aura, par la combinaison des inégalités ci-dessus,

$$a_\mu \overline{\overline{<}} a_\lambda < b_\lambda < b_\nu.$$

Donc, tout nombre b est plus grand que tout nombre a.

Mais on a d'autre part

$$b_\nu - a_\nu \overline{\overline{<}} (x_\nu + \varepsilon_\nu) - (x_\nu - \varepsilon_\nu) < 2\varepsilon_\nu,$$

quantité qui peut être rendue $< \varepsilon$ en prenant ν assez grand.

Donc les deux systèmes de nombres a et b déterminent un nombre c. Ce nombre et le nombre $x_{\nu+p}$ étant tous deux compris entre a_ν et b_ν, on aura

$$|x_{\nu+p} - c| < \varepsilon,$$

ce qui est précisément la condition pour que les quantités x convergent vers c.

10. Corollaire. — *Si les quantités x_n sont telles que l'on ait toujours*

$$x_{n+1} \overline{\overline{>}} x_n,$$

elles tendront vers une limite c ou croîtront de manière à surpasser finalement toute grandeur donnée E.

En effet, supposons en premier lieu que, pour toute valeur

de la quantité positive δ, on puisse déterminer un entier ν tel que l'on ait constamment

$$x_{\nu+p} - x_\nu < \delta,$$

quel que soit p.

Donnons à δ une suite de valeurs δ_1, δ_2, ... convergeant vers zéro; soient ν_1, ν_2, ... les valeurs correspondantes de ν.

Soit, d'autre part, n un nombre $\overline{\gtrless} \nu_k$ mais $< \nu_{k+1}$. On aura

$$|x_n - x_{n+p}| = x_{n+p} - x_n \overline{\gtrless} x_{n+p} - x_{\nu_k},$$

et si l'on pose $n+p = \nu_k + q$,

$$|x_n - x_{n+p}| < x_{\nu_k+q} - x_{\nu_k} < \delta_k.$$

Si donc on définit les quantités ε_{ν_1}, ..., ε_n, ... par la condition

$$\varepsilon_n = \delta_k \qquad \text{quand } n \overline{\gtrless} \nu_k < \nu_{k+1},$$

on aura

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

Les quantités ε_n, ainsi définies, convergeant vers zéro, les quantités x_n tendront vers une limite.

Supposons, au contraire, qu'il existe une quantité δ pour laquelle il soit impossible de déterminer une quantité ν correspondante. On pourra, quel que soit n, déterminer un nombre $n+p = n_1$ tel que $x_{n_1} - x_n$ soit plus grand que δ. Nous pourrons donc déterminer une suite illimitée de nombres 1, n_1, n_2, ..., n_k, ... tels que l'on ait

$$x_{n_1} - x_1 \overline{\gtrless} \delta, \qquad x_{n_2} - x_{n_1} > \delta, \qquad \ldots,$$

d'où

$$x_{n_k} > x_1 + k\delta.$$

Ce nombre deviendra plus grand que le nombre donné E dès que k sera supérieur à $\dfrac{E - x_1}{\delta}$.

11. *Si la variable x tend vers la limite c, $-x$ tend vers la limite $-c$.*

Cette proposition est évidente; car on a

$$|x-c| = |-x+c|.$$

Si donc on a pour $n > \nu$

$$|x_n - c| < \varepsilon,$$

on aura en même temps

$$|-x_n + c| < \varepsilon.$$

12. *Si la variable x tend vers une limite c différente de zéro, $\frac{1}{x}$ tendra vers la limite $\frac{1}{c}$.*

Posons, en effet, $x_n - c = \xi_n$; on aura

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{c}\right| = \left| -\frac{\xi_n}{c(c+\xi_n)}\right| = \frac{|\xi_n|}{|c|\,|c+\xi_n|} \overset{=}{<} \frac{|\xi_n|}{|c|(|c| - |\xi_n|)},$$

quantité qui deviendra $< \varepsilon$, dès que n sera devenu assez grand pour qu'on ait

$$|\xi_n| < \frac{|c|^2 \varepsilon}{1 + |c|\varepsilon}.$$

Si x tend vers la limite zéro, on pourra, quelle que soit la quantité positive E, déterminer un nombre ν tel qu'on ait, pour toute valeur de n plus grande que ν,

$$|x_n| < \frac{1}{E}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| > E.$$

Donc $\frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite. Nous conviendrons toutefois de dire qu'il *tend vers* ∞.

Si, en tendant vers ∞, x reste à partir d'un certain moment constamment positif, on dira qu'il tend vers $+\infty$. S'il reste constamment négatif, il tendra vers $-\infty$.

13. *Soient x, y deux quantités variables simultanément, et prenant respectivement les suites de valeurs x_1, y_1; ...; x_n, y_n, ... Si x, y tendent respectivement vers*

des limites finies c, d, $x+y$ et xy *tendront vers les limites* $c+d$, cd.

Posons, en effet,

$$x_n - c = \xi_n, \qquad y_n - d = \eta_n.$$

On pourra, par définition, quelle que soit la quantité positive δ, déterminer deux quantités ν_1 et ν_2, telles que l'on ait

$$|\xi_n| < \delta, \quad \text{si } n > \nu_1,$$
$$|\eta_n| < \delta, \quad \text{si } n > \nu_2,$$

et, par suite,

$$|\xi_n| < \delta, \qquad |\eta_n| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu,$$

ν désignant la plus grande des quantités ν_1 et ν_2.

Cela posé, on a

$$|x_n + y_n - (c+d)| = |\xi_n + \eta_n| \overline{\overline{<}} |\xi_n| + |\eta_n| < 2\delta,$$
$$|x_n y_n - cd| = |c\eta_n + d\xi_n + \xi_n\eta_n|$$
$$\overline{\overline{<}}\ |c|\,|\eta_n| + |d|\,|\xi_n| + |\xi_n|\,|\eta_n|$$
$$< |c|\delta + |d|\delta + \delta^2.$$

Les seconds membres de ces inégalités seront $< \varepsilon$ si l'on détermine l'arbitraire δ de telle sorte qu'on ait en même temps

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \delta < 1, \qquad \delta < \frac{\varepsilon}{|c| + |d| + 1}.$$

Notre proposition est donc démontrée.

Si x tend vers ∞, y continuant à tendre vers une limite finie d, on pourra, de même, quelles que soient les arbitraires E′ et δ, déterminer un nombre ν tel que l'on ait

$$|x_n| > E', \qquad |y_n - d| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu,$$

d'où

$$|x_n + y_n| = |x_n + y_n - d + d| \overline{\overline{>}} |x_n| - |y_n - d| - |d|$$
$$> E' - \delta - |d| > E,$$

si l'on choisit E′ plus grand que $E + \delta + |d|$. Donc, dans ce cas, $x+y$ tendra vers ∞.

Le produit xy tendra aussi vers ∞, si d n'est pas nul. En effet, choisissant pour δ une quantité $< |d|$, on aura

$$y_n = d + (y_n - d),$$

d'où

$$|y_n| \overline{\overline{>}} |d| - \delta,$$

et enfin

$$|x_n y_n| > \mathrm{E}'(|d| - \delta) > \mathrm{E},$$

si l'on choisit E' plus grand que $\dfrac{\mathrm{E}}{|d| - \delta}$.

Si y tendait vers zéro, en même temps que x vers ∞, on ne pourrait rien affirmer *a priori*.

Supposons enfin que x et y tendent tous deux vers ∞. On ne pourra rien affirmer *a priori* sur la somme $x + y$. Mais le produit tendra évidemment vers ∞.

14. De la combinaison des résultats qui précèdent, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Soit $\mathrm{R}(x, y, \ldots)$ *une expression rationnelle quelconque des variables* $x, y, \ldots$. *Si ces variables tendent simultanément vers les limites* $c, d, \ldots$, $\mathrm{R}(x, y, \ldots)$ *tendra vers la limite* $\mathrm{R}(c, d, \ldots)$.

Ce théorème est toutefois soumis à cette restriction que la suite des opérations indiquées pour calculer R, connaissant $x, y, \ldots$, puisse s'exécuter effectivement pour les valeurs particulières $x = c$, $y = d$, ...

Si donc parmi ces opérations figurent des divisions, il faut que le diviseur ne soit pas nul.

15. L'Arithmétique et l'Algèbre comportent quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. On peut en concevoir une cinquième, consistant à remplacer une quantité variable par sa limite. C'est l'introduction de cette nouvelle opération qui caractérise le Calcul infinitésimal.

16. Infiniment petits. — On donne le nom d'*infiniment petit* à toute quantité variable qui tend vers zéro; celui d'*infiniment grand* à toute quantité variable qui tend vers ∞.

L'inverse d'un infiniment petit sera donc un infiniment grand, et réciproquement.

La suite des valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, qu'on assigne successivement à un infiniment petit x, doit avoir, par définition, zéro pour limite; on peut ne la soumettre à aucune autre restriction. Mais on peut aussi, si l'on veut, l'assujettir à d'autres conditions : stipuler, par exemple, que ces quantités seront positives, ou rationnelles, etc. Sauf ces restrictions, qui devront être spécifiées dans chaque cas, on devra la considérer comme arbitraire.

17. Deux infiniment petits x, y seront *indépendants*, s'il n'existe aucune corrélation obligatoire entre les valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ et $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ qu'on leur attribue respectivement.

Au contraire, s'ils sont liés de telle sorte que, x_n étant connu, on puisse en déduire y_n, on dira que y est un infiniment petit *dépendant* de x. Cette dépendance sera, en général, réciproque, de telle sorte que, y_n étant connu, x_n pourra s'en déduire.

Deux infiniment petits x, y étant ainsi liés, on dira qu'ils sont du même *ordre*, si, lorsque x tend vers zéro, $\frac{y}{x}$ a pour limite une quantité constante c différente de o; y sera d'ordre plus élevé que x, si $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro; il sera d'ordre moindre, si $\frac{y}{x}$ tend vers ∞.

On peut, dans la plupart des cas, préciser cette notion, en mesurant par un nombre l'ordre de grandeur d'un infiniment petit. On pourra dire, en effet, que y est d'ordre α par rapport à x, si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, lorsque x tend vers zéro.

D'après cette définition, une quantité y qui tend vers une limite finie sera un infiniment petit d'ordre zéro; un infiniment grand y tel que yx^α tende vers une limite finie et différente de zéro sera un infiniment petit d'ordre $-\alpha$.

Dans toute question où figurent plusieurs infiniment petits $x, y, z, \ldots$ dépendant les uns des autres, on pourra choisir arbitrairement l'un d'eux comme étalon de mesure. Cet *infiniment petit principal*, x, par exemple, étant considéré comme ayant pour ordre de grandeur l'unité, $y, z, \ldots$ auront des ordres de grandeur représentés respectivement par des nombres $\alpha, \beta, \ldots$.

Le même procédé de comparaison serait applicable à des infiniment grands.

18. Soient y un infiniment petit d'ordre α; A la limite vers laquelle tend $\frac{y}{x^\alpha}$ quand x tend vers zéro. On aura

$$\frac{y}{x^\alpha} = \mathrm{A} + h, \qquad \text{d'où} \qquad y = \mathrm{A}x^\alpha + hx^\alpha,$$

h tendant vers zéro avec x.

Le premier terme $\mathrm{A}x^\alpha$ se nomme la *valeur principale* de y. Il représente cet infiniment petit avec une erreur relative qui décroît indéfiniment avec x.

Si l'on ne veut pas se contenter de cette première approximation, on aura à déterminer la valeur principale du reste. Soit $\mathrm{B}x^\beta$ cette valeur principale; nous aurons une seconde valeur

$$y = \mathrm{A}x^\alpha + \mathrm{B}x^\beta$$

approchée jusqu'à l'ordre β. On chercherait de même, s'il était utile, la valeur principale du reste, et ainsi de suite.

La détermination des valeurs principales des infiniment petits et leur développement en série suivant les puissances de l'infiniment petit principal, qui en est la conséquence, formeront en grande partie l'objet de la première Partie de ce Cours.

La solution de ce problème fondamental fournit une méthode d'approximation précieuse dans toutes les applications des Mathématiques; mais là ne se borne pas son utilité : elle permet d'obtenir des résultats d'une entière rigueur, fondés sur la proposition suivante.

19. *Le rapport de deux infiniment petits du même ordre, y et z, ayant respectivement pour valeurs principales Ax^α et Bx^α, a pour limite $\frac{A}{B}$.*

On a, en effet,

$$y = x^\alpha(A + h), \qquad z = x^\alpha(B + k),$$

h et k tendant vers zéro avec x. Donc

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \frac{A + h}{B + k} = \frac{A}{B}.$$

II. — Ensembles.

20. Soient $x, y, \ldots$ des quantités variables; nous appellerons *point* un système de valeurs simultanées $a, b, \ldots$ donné à ces variables; *écart* de deux points $p = (a, b, \ldots)$ et $p' = (a', b', \ldots)$ l'expression

$$pp' = |a' - a| + |b' - b| + \ldots.$$

Si cet écart est nul, les deux points coïncident, et réciproquement.

On dira que le point $p = (a, b, \ldots)$ est la *limite* d'une suite de points

$$p_1 = (x_1, y_1, \ldots), \qquad \ldots, \qquad p_n = (x_n, y_n, \ldots),$$

si l'écart pp_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment, ce qui revient à dire que $x_n, y_n, \ldots$ ont respectivement pour limites $a, b, \ldots$.

On nomme *ensemble* toute collection de points, en nombre fini ou infini. Un ensemble aura autant de *dimensions* qu'il figure de variables $x, y, \ldots$ dans la définition de ses points.

On nomme *point limite* d'un ensemble E tout point qui est la limite d'une suite de points de E. Le système de ces points limites forme un nouvel ensemble E', qu'on appelle le *dérivé* de E.

Considérons, par exemple, le cas d'une seule dimension. D'après les définitions précédentes, l'ensemble des nombres entiers n'a pas de point limite.

Celui des fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ a une seule limite $x = 0$.

Celui des nombres rationnels $> a$ et $< b$ a pour dérivé l'ensemble des nombres réels $\geqq a$ et $\leqq b$.

Ce dernier se confond avec son dérivé.

On voit par ces exemples qu'un ensemble E peut contenir des points qui n'appartiennent pas à son dérivé E', et réciproquement.

Si un point $p = (a, b, \ldots)$ appartient à E sans appartenir à E', on pourra, par définition, trouver une quantité ε telle que tout autre point de E soit écarté de p de plus de ε. On dit dans ce cas que p est un *point isolé* dans E.

21. Nous appellerons *ensemble parfait* tout ensemble qui contient son dérivé.

Un ensemble E', *dérivé d'un autre ensemble* E, *est nécessairement parfait.*

Soit en effet π un point limite de E'. On pourra, par hypothèse, déterminer dans E' un point p' tel que l'écart $p'\pi$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, p' étant un point limite de E, on pourra déterminer dans E un point p tel que l'écart pp' soit $< \frac{\varepsilon}{2}$. Cela posé, soit

$$p = (a, b, \ldots), \qquad p' = (a', b', \ldots), \qquad \pi = (\alpha, \beta, \ldots);$$

on aura

$$\begin{aligned}p\pi &= |a-\alpha\ | + |b-\beta| + \ldots \\ &\leqq |a-a'| + |a'-\alpha| + |b-b'| + |b'-\beta| + \ldots \\ &\leqq pp' + p'\pi < \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc π est un point limite de E et appartient à E'.

22. Si l'ensemble E ne contient pas tous les points possibles, les points qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble *complémentaire* E_1.

Soient respectivement E', E'_1 les ensembles dérivés de E, E_1. Tous les points de l'espace pourront être répartis en trois classes :

1° Ceux qui appartiennent à E, sans appartenir à E'_1. Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle, que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ n'appartient pas à E_1, et par suite appartient à E. Nous dirons que les points de cette classe sont *intérieurs* à E (et *extérieurs* à E_1).

2° Ceux qui appartiennent à E_1, sans appartenir à E'. Ces points seront extérieurs à E et intérieurs à E_1.

3° Enfin ceux qui appartiennent en même temps à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre. Ces points constituent la *frontière* commune des deux ensembles E, E_1.

Il existe toujours des points frontières. Soient en effet $p = (a, b, \ldots)$ et $\pi = (\alpha, \beta, \ldots)$ deux points quelconques, choisis respectivement dans E et dans E_1, et soit n un entier arbitraire. Considérons la série des points

$$\left[a + \frac{m}{2^n}(\alpha - a), \quad b + \frac{m}{2^n}(\beta - b), \quad \ldots\right],$$

où m prend successivement les valeurs $0, 1, \ldots, 2^n$. Le premier point de cette suite est p et appartient à E; le dernier est π et appartient à E_1. Soit p_n le dernier des points de cette suite qui appartienne à E, π_n le suivant. On aura

$$\begin{aligned}p_n &= [a + t_n(\alpha - a), \qquad b + t_n(\beta - b), \qquad \ldots],\\ \pi_n &= [a + u_n(\alpha - a), \qquad b + u_n(\beta - b), \qquad \ldots],\end{aligned}$$

t_n et u_n étant deux fractions comprises entre o et 1, ayant pour différence $\frac{1}{2^n}$ et dont la première ne décroît jamais, et la seconde ne croît jamais lorsqu'on fait croître n.

Supposons d'abord qu'il n'existe aucune valeur de n au delà de laquelle t_n cesse définitivement de croître ou u_n de décroître. Les quantités t_n et u_n tendront vers une limite commune θ, et les points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ d'une part, $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ d'autre part, auront pour limite le point

$$P = [a + \theta(\alpha - a),\ b + \theta(\beta - b),\ \ldots].$$

Ce point appartiendra donc à la fois à E' et à E'_1, et, comme il appartient nécessairement à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Supposons, au contraire, qu'à partir d'une valeur ν de n, t_n, par exemple, cesse de croître, et reste égal à t_ν; u_n décroîtra et tendra vers t_ν; les points $\pi_\nu, \pi_{\nu+1}, \ldots$ tendront donc vers p_ν. Ce point appartiendra donc à E'_1 et, comme il appartient à E, c'est encore un point frontière.

23. *La frontière* F *dont l'existence vient d'être établie constitue un ensemble parfait.*

Soit en effet q un point limite de F; F contiendra une suite infinie de points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ convergeant vers q.

Si parmi eux il y en a une infinité appartenant à E et à E'_1, leur point limite q appartiendra à E' et à E''_1, dérivés de E et de E'_1. Mais E'_1, étant parfait, contient son dérivé. Donc q appartient à la fois à E' et à E'_1, et, comme il appartient nécessairement à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Si, parmi les points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, il n'en existe qu'un nombre borné appartenant à E et à E'_1, les autres, en nombre infini, appartiendront à E_1 et E', et la conséquence sera la même.

24. Quant aux points intérieurs ou extérieurs, leur existence n'est pas nécessaire. Il est évident, par exemple, que si l'on prend pour E l'ensemble des nombres rationnels,

pour E_1 celui des nombres irrationnels, il n'y aura aucun point qui ne soit contenu dans la frontière.

Les ensembles parfaits qui contiennent des points intérieurs présentent un intérêt particulier, et il convient de les caractériser par un nom spécial. Nous les appellerons des *domaines*.

25. Un ensemble E d'une seule dimension est dit *borné supérieurement* (*inférieurement*), si tous les nombres qui le composent sont inférieurs (supérieurs) à un nombre fixe L.

Soient, dans ce cas, F l'ensemble des nombres plus grands (plus petits) que tous ceux de E; F_1 son complémentaire. Il existe un nombre frontière M, lequel jouira de la double propriété : 1° que E ne contient aucun nombre $> M$ ($< M$); 2° qu'il en contient qui sont $> M - \varepsilon$ ($< M + \varepsilon$), quel que soit le nombre positif ε.

Ce nombre M est, d'après cet énoncé, une des limites de E; nous l'appellerons la *limite supérieure* ou le *maximum* (*limite inférieure* ou *minimum*) de E. Il peut, suivant les cas, rester en dehors de l'ensemble E ou lui appartenir. On dit, dans ce dernier cas, que E *atteint* son maximum (son minimum). Cette circonstance se présentera nécessairement si E est un ensemble parfait.

Si plusieurs ensembles E_1, E_2, ... admettent respectivement des maxima (ou minima) M_1, M_2, ..., il est clair que l'ensemble E, résultant de leur réunion, aura pour maximum le plus grand (pour minimum le plus petit) des nombres M_1, M_2, ...

Si réciproquement on décompose un ensemble E admettant un maximum (un minimum) M en ensembles partiels E_1, E_2, ..., ceux-ci admettront des maxima au plus égaux à M (des minima au moins égaux à M).

26. Considérons plus généralement un ensemble E à un nombre quelconque de dimensions.

Soient $(a, b, \ldots)$, ... ses points. Nous dirons qu'il est

borné si l'ensemble de toutes les valeurs des modules $|a|$, $|b|$, ... pour ses divers points admet un maximum μ. Dans ce cas, les nombres a, b, ... étant compris entre $-\mu$ et $+\mu$, forment un ensemble borné en dessus comme en dessous.

Réciproquement, si l'ensemble des nombres a, b, ... admet un maximum M et un minimum m, l'ensemble E sera borné, car les modules $|a|$, $|b|$, ... ne pourront surpasser le plus grand des deux nombres $|M|$, $|m|$.

27. *Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un ensemble E à deux dimensions; soient (a, b), ... ses points. Soient M et m les deux nombres fixes entre lesquels tous les nombres a et b sont compris.

Partageons l'intervalle $M - m$ en n intervalles égaux. Chacun des nombres a, b tombera dans l'un de ces intervalles. Groupons en un ensemble partiel tous ceux des points de E dans lesquels a et b tombent respectivement dans les mêmes intervalles. Nous obtiendrons ainsi n^2 ensembles partiels, dont la réunion constitue E. L'un au moins E_1 de ces nouveaux ensembles devra contenir une infinité de points; et si (a, b), (a', b') sont deux de ces points, leur écart, $|a - a'| + |b - b'|$, ne pourra surpasser $2\dfrac{M - m}{n}$.

Opérant sur E_1 comme sur E, on le décomposera en ensembles partiels dont l'un au moins, E_2, contiendra une infinité de points dont l'écart ne pourra surpasser $2\dfrac{M - m}{n^2}$.

On opérera sur E_2 comme sur E_1, et ainsi de suite.

Cela posé, soient

p_1 un point choisi à volonté dans E_1;
p_2 un point différent de p_1, choisi à volonté dans E_2;
p_3 un point différent de p_1 et de p_2, choisi à volonté dans E_3;

et ainsi de suite.

Ces points p_1, p_2, p_3, ... tendront évidemment vers un point limite π.

28. Nous pouvons ajouter la remarque suivante, qui nous sera souvent utile :

Soit ε une quantité quelconque. La suite p_1, p_2, ... contient un point p_α dont l'écart à $\cancel{p}$ π est $< \varepsilon$. Soit ε_1 un autre nombre, moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ et que les écarts $p_1\pi$, ..., $p_\alpha\pi$. La suite contiendra un point p_{α_1} dont l'écart à π sera $< \varepsilon_1$; et l'indice α_1 sera $> \alpha$. Soit ε_2 un nombre moindre que les écarts $p_1\pi$, ..., $p_{\alpha_1}\pi$ et que $\frac{\varepsilon_1}{2}$; la suite contiendra de même un point p_{α_2} dont l'écart à π sera $< \varepsilon_2$ et α_2 sera $> \alpha_1$; et ainsi de suite.

On obtient ainsi une infinité de points successifs p_α, p_{α_1}, p_{α_2}, ... ayant pour limite π, et tels : 1° que les indices α, α_1, α_2, ... aillent en croissant ; 2° que l'écart de p_{α_n} à π soit $< \frac{1}{2^n}\varepsilon$.

29. Soient E et E′ deux ensembles formés par des points de même nature.

Les écarts des divers points p de E aux points p' de E′ forment un ensemble de nombres non négatifs. Il est donc borné inférieurement, et admet un minimum Δ, positif ou nul, que nous appellerons l'*écart* des ensembles E, E′. Si cet écart est > 0, nous dirons que les ensembles E, E′ sont *séparés*.

30. *Si deux ensembles bornés et parfaits* E, E′ *qui n'ont aucun point commun ont pour écart* Δ, *ils contiendront au moins un couple de points ayant précisément* Δ *pour écart mutuel.*

Soient, en effet, $p = (x, y, \ldots)$, ... les points de E ; $p' = (x', y', \ldots)$, ... ceux de E′. Associons-les deux à deux

de toutes les manières possibles de manière à former de nouveaux points $pp' = (x, y, \ldots, x', y', \ldots)$ dépendant d'un nombre double de variables. L'ensemble EE' de ces points sera évidemment borné et parfait.

Cela posé, si E et E' ne contenaient aucun couple de points dont l'écart fût Δ, ils contiendraient tout au moins un couple de points p_1, p'_1 dont l'écart serait moindre que $\Delta + \varepsilon$, ε étant un nombre donné qui peut être choisi à volonté.

Soient d l'écart de p_1 à p'_1, ε_1 un nombre $< d$ et $< \frac{\varepsilon}{2}$. On pourra déterminer un nouveau couple de points p_2, p'_2 dont l'écart soit $< \Delta + \varepsilon_1$.

Continuant ainsi, nous obtiendrons une suite infinie de couples $p_1, p'_1; \ldots; p_n, p'_n; \ldots$ dont les écarts mutuels convergent vers Δ. Les points correspondants $p_1 p'_1, \ldots, p_n p'_n$ de l'ensemble EE', étant en nombre infini, admettent au moins un point limite pp', où les deux points composants p, p' auront pour écart Δ. Mais p est une limite de l'ensemble des points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ qui appartiennent tous à E; c'est donc un des points limites de E; et comme cet ensemble est parfait, il contient p. On voit de même que E' contient p'. Le théorème est donc démontré.

L'écart Δ ne peut être nul, car s'il l'était, p et p' se confondant, E et E' auraient un point commun contre l'hypothèse.

31. Nous disons qu'un ensemble parfait et borné est d'un seul tenant lorsqu'il ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés.

On voit aisément que le caractère distinctif d'un pareil ensemble est le suivant :

Entre deux quelconques de ses points p, p', on peut toujours, quel que soit ε, intercaler une chaîne de points intermédiaires, telle que l'écart de deux points consécutifs soit $\overline{\gtrless}\, \varepsilon$.

Cette condition est nécessaire. En effet, supposons que pour une valeur donnée de ε elle ne soit pas satisfaite. Associons au point p d'abord tous ceux des points de E dont l'écart à p est $\overline{\gtrless}\,\varepsilon$, puis ceux dont l'écart à l'un de ceux-ci est $\overline{\gtrless}\,\varepsilon$, et ainsi de suite. Tous les points ainsi groupés forment un ensemble E_1. Les autres points de E forment un ensemble E_2, contenant au moins un point p', et dont l'écart à E_1 est $> \varepsilon$. D'ailleurs chacun des ensembles E_1, E_2 est parfait. Soit, en effet, l_1 un point limite de E_1. Il appartient à E, qui est supposé parfait; d'ailleurs, il existe des points de E_1 dont il est écarté de moins de ε. Donc il appartient à E_1 et non à E_2.

Soit, d'autre part, l_2 un point limite de E_2. Il appartient à E; et, comme il existe des points de E_2 qui en sont écartés de moins de ε, il ne peut appartenir à E_1; donc il appartient à E_2.

Réciproquement, cette condition est suffisante. En effet, supposons E décomposable en deux ensembles parfaits séparés E_1, E_2; soit δ leur écart; p_1, p_2 deux points pris respectivement dans E_1 et E_2; si on les relie par une chaîne quelconque de points intermédiaires, on aura nécessairement deux points consécutifs appartenant l'un à E_1, l'autre à E_2. Leur écart sera donc $\overline{\gtrless}\,\delta$; et la condition de l'énoncé ne sera pas remplie, pour les valeurs de ε moindres que δ.

32. La proposition qui précède entraîne cette conséquence évidente :

Un ensemble E *formé par la réunion d'un nombre quelconque d'ensembles d'un seul tenant* E_1, E_2, ... *dont chacun a au moins un point commun avec l'un des précédents est lui-même d'un seul tenant.*

33. *Un ensemble d'un seul tenant* E, *s'il ne se compose pas d'un seul point, se confond avec son dérivé* E'. En effet, il le contient, par définition. Mais, d'autre part, il y est contenu. Soient, en effet, p, p' deux points arbitrairement choisis dans E. On peut intercaler entre eux une chaîne de points

$p_1, p_2, \ldots$ telle que l'écart de deux points consécutifs quelconques, et notamment celui de p à p_1, soit $\overline{\gtrless}\ \varepsilon$. Soient d cet écart; ε_1 un nombre $< d$ et $< \frac{\varepsilon}{2}$. On peut trouver de la même manière un nouveau point p_2 dont l'écart à p soit $< \varepsilon_1$. Continuant de même, on obtiendra une suite infinie de points $p_1, p_2, \ldots$, convergeant vers p. Donc, p appartient à E'.

34. On peut encore remarquer qu'*un ensemble* E, *d'un seul tenant et d'une seule dimension, qui contient deux nombres donnés* a *et* b, *contient tout nombre* c *intermédiaire entre* a *et* b. Soient, en effet, $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres intermédiaires entre a et c et convergeant vers c; $b_1, b_2, \ldots$ une suite de nombres intermédiaires entre b et c et convergeant vers c. On pourra, par hypothèse, intercaler entre a et b une chaîne de nombres appartenant à E, et dont les écarts successifs soient moindres que $b_n - a_n$. L'un au moins de ces nombres intermédiaires tombera entre a_n et b_n. Désignons-le par c_n. Soit ε_1 l'écart $|c_n - c|$; on peut trouver dans les suites $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ deux nombres a_{n_1}, b_{n_1} dont l'écart soit $< \varepsilon_1$, puis déterminer dans E un nouveau nombre c_{n_1} tombant entre a_{n_1} et b_{n_1}; et ainsi de suite. Les nombres $c_n, c_{n_1}, \ldots$ convergent vers c. Donc c est une limite de E, et, comme E est parfait, c est l'un de ses points.

Si l'ensemble E est borné, il admettra un maximum M et un minimum m; étant parfait, il les atteindra. Il est donc formé par le système de tous les nombres réels qui sont $\overline{\gtrless}$ M et $\overline{\gtrless}\ m$.

Si E n'est borné que supérieurement (inférieurement), il sera formé par l'ensemble des nombres réels qui sont $\overline{\gtrless}$ M (qui sont $\overline{\gtrless}\ m$).

S'il n'est borné dans aucun sens, il contiendra tous les nombres possibles.

35. Soit E un ensemble borné, formé des points $p, p_1, \ldots$. Les écarts de ces points, pris deux à deux, forment un en-

semble de nombres positifs qui est borné. Il admet donc un maximum d que nous appellerons le *diamètre* de l'ensemble E.

36. Nous allons chercher, d'autre part, à préciser la notion de l'*étendue* de cet ensemble (à laquelle nous pourrons donner en particulier le nom de *longueur*, d'*aire* ou de *volume*, lorsque le nombre des dimensions se réduit à 1, 2, ou 3).

Considérons, pour fixer les idées, le cas de deux dimensions. Chaque point (u, v) de E pourra être représenté géométriquement sur un plan dont u et v sont les coordonnées. Décomposons ce plan, par des parallèles aux axes coordonnés, en carrés de côté r.

L'ensemble de ceux de ces carrés qui sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui rencontrent sa frontière forme un nouveau domaine $S + S'$ auquel E est intérieur. Ces domaines ont des aires déterminées que nous représenterons également par S et $S + S'$.

Faisons varier notre décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro; *les aires* S *et* $S + S'$ *tendront vers des limites fixes.*

En effet, considérons, par exemple, les aires S. Celles de ces aires pour lesquelles r reste au-dessous d'un nombre fixe ρ sont bornées, car elles sont toutes contenues dans un même carré de côté $M - m + 2\rho$, M et m désignant le maximum et le minimum des coordonnées u, v dans l'ensemble E. Soit A leur maximum. On pourra trouver une décomposition déterminée pour laquelle S prenne une valeur S_1 plus grande que $A - \varepsilon$. Soit δ l'écart entre la frontière de E et celle du domaine S_1. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $< \frac{\delta}{2}$. L'écart maximum de deux points d'un même carré y sera $< \delta$. Donc tous ceux de ces carrés dont un point appartient à S_1 seront en entier

ans l'intérieur de E. Donc le domaine S contiendra S_1, et 'on aura

$$S \geqq S_1 > A - \varepsilon;$$

l'autre part, $S \leqq A$. Donc les sommes S auront bien une limite égale à A.

D'autre part, les aires $S + S'$, n'étant pas négatives, sont ornées inférieurement, et admettent un minimum a.

Il existera une décomposition déterminée pour laquelle $S + S'$ prendra une valeur $S_1 + S'_1$ moindre que $a + \varepsilon$. Soit δ l'écart des frontières de E et du domaine $S_1 + S'_1$. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $< \frac{\delta}{2}$. Tous les carrés dont un point appartient à E ou à sa frontière seront intérieurs à $S_1 + S'_1$. On aura donc

$$S + S' \leqq S_1 + S'_1 < a + \varepsilon.$$

D'autre part, $S + S' \geqq a$. Donc a est bien la limite des sommes $S + S'$.

Comme on a $S + S' \geqq S$, a sera au moins égal à A.

Nous appellerons A *l'aire intérieure* de E, a son *aire extérieure*. Si S' a pour limite zéro, nous dirons que E est *quarrable* et qu'il a pour *aire* la quantité $a = A$.

37. Soit E' un nouvel ensemble intérieur à E. L'aire extérieure de E', et *a fortiori* son aire intérieure, seront moindres que l'aire intérieure de E. Soit, en effet, δ l'écart des frontières de E et de E'. Si l'on décompose le plan en carrés de côté $< \frac{\delta}{4}$, il est évident que tous les carrés non extérieurs à E', et aussi les carrés adjacents, sont intérieurs à E. L'aire intérieure de E surpasse donc l'aire extérieure de E' d'une quantité au moins égale à la somme de ces derniers carrés.

38. Supposons enfin E formé par la réunion de plusieurs ensembles partiels $E_1, E_2, \ldots$, et considérons une décompo-

sition quelconque du plan en carrés. Soient respectivement $S, S_1, S_2, \ldots$ les sommes des carrés intérieurs à $E, E_1, E_2, \ldots$; $S', S'_1, S'_2, \ldots$ celles des carrés qui rencontrent leurs frontières. Tout carré intérieur à l'un des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ l'est à E; et, d'autre part, tout carré non extérieur à E est nécessairement non extérieur à l'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots$, on aura donc

$$S \overline{\underline{>}} S_1 + S_2 + \ldots, \qquad S + S' \overline{\underline{<}} S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + \ldots,$$

et, en passant à la limite,

$$A \overline{\underline{>}} A_1 + A_2 + \ldots, \qquad a \overline{\underline{<}} a_1 + a_2 + \ldots,$$

$A_1, A_2, \ldots$ et $a_1, a_2, \ldots$, représentant les aires intérieures et extérieures de $E_1, E_2, \ldots$. Les inégalités ci-dessus se changent d'ailleurs en égalités, si $E_1, E_2, \ldots$ sont quarrables.

39. On peut concevoir une infinité de décompositions du plan en régions élémentaires quarrables $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ dont le diamètre ne surpasse pas un nombre donné ρ. Considérons une suite quelconque de décompositions de ce genre, dans laquelle ρ tende vers zéro. La somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue aux éléments intérieurs à E, aura pour limite A, aire intérieure de cet ensemble.

Nous pouvons, en effet, déterminer une décomposition du plan en carrés, telle que la somme S des aires des carrés intérieurs à E soit $> A - \varepsilon$; soit δ l'écart des frontières de E et de S. Dès que ρ sera devenu $< \delta$, tout élément $\Delta\sigma$ qui a un de ses points dans S sera tout entier intérieur à E. L'aire $\Sigma\Delta\sigma$ contiendra donc à ce moment l'aire S, et sera $> A - \varepsilon$. Mais, d'autre part, elle ne peut surpasser A. En effet, soit δ' l'écart entre sa frontière et celle de E; concevons une autre décomposition en carrés, de côté $< \frac{\delta'}{2}\cdot$ Tous ceux de ces carrés qui ont un point commun avec l'aire $\Sigma\Delta\sigma$ seront inté-

rieurs à E. La somme S_1 des aires des carrés intérieurs est donc au moins égale à $\Sigma\Delta\sigma$; mais elle ne surpasse pas A.

Donc A est bien la limite des sommes $\Sigma\Delta\sigma$.

On voit, de la même manière, que la somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue, non seulement aux éléments intérieurs à E, mais aussi à ceux qui rencontrent sa frontière, a pour limite l'aire extérieure a. Par suite, la somme ci-dessus, bornée à ces éléments frontières, tendra vers zéro, si E est quarrable.

40. Les considérations qui précèdent sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer, pour chacun d'eux, une *étendue intérieure* et une *étendue extérieure*. Si celles-ci coïncident, l'ensemble sera *mesurable*.

III. — Fonctions bornées. Fonctions intégrables.

41. Des quantités variables, x, y, ..., sont dites *indépendantes,* s'il n'existe entre elles aucun lien, de telle sorte que chacune d'elles puisse encore prendre toutes les valeurs dont elle est susceptible, après qu'on a fixé la valeur des autres.

Soit, au contraire, u une nouvelle variable, liée aux précédentes de telle sorte qu'à chaque point $(x, y, \ldots)$ appartenant à un certain ensemble E, corresponde une valeur déterminée de u. On dira que cette relation définit u comme *fonction* de x, y, ... dans l'ensemble E.

Une fonction de x, y, ... peut se représenter par la notation $f(x, y, \ldots)$. Si l'on considère simultanément plusieurs fonctions différentes, on pourra les désigner respectivement par $F(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$, ... en changeant la lettre initiale.

La définition qui précède est d'une telle généralité qu'il est évidemment impossible d'établir aucune propriété applicable à toutes les fonctions sans exception. Des hypothèses

restrictives sont, en effet, nécessaires pour servir de base à un raisonnement quelconque.

42. Fonctions bornées. — Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *bornée*, dans un ensemble E pour lequel elle est définie, si les valeurs qu'elle prend pour les divers points $(x, y, \ldots)$ de cet ensemble forment un ensemble borné.

La somme, la différence et le produit de deux fonctions bornées f et φ sont des fonctions bornées; car on a

$$|f \pm \varphi| \leqq |f| + |\varphi|,$$
$$|f \cdot \varphi| = |f|\,|\varphi|.$$

Si f est une fonction bornée et si le minimum μ de son module n'est pas nul, $\frac{1}{f}$ sera également bornée; car on a

$$\left|\frac{1}{f}\right| = \frac{1}{|f|} < \frac{1}{\mu}.$$

43. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction bornée dans un domaine E, dont l'étendue, que nous supposerons mesurable, sera également représentée par E.

Décomposons E en domaines élémentaires mesurables $e_1, e_2, \ldots$. Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k; et formons les sommes

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Comme on a évidemment

$$m \leqq m_k \leqq M_k \leqq M,$$

S et s seront comprises entre

$$\sum M e_k = M \sum e_k = ME$$

et

$$\sum m e_k = m \sum e_k = m\mathrm{E},$$

et leurs modules seront au plus égaux à LE, L désignant le plus grand des deux modules $|\mathrm{M}|$ et $|m|$ [ou le maximum du module de $f(x, y, \ldots)$ dans le domaine E].

44. Théorème de M. Darboux. — *Si nous faisons varier la décomposition en éléments, de telle sorte que les diamètres de ces éléments tendent vers zéro, les sommes* S *et* s *tendront vers des limites fixes.*

En effet, considérons, par exemple, les diverses sommes S. Leurs valeurs forment, comme nous venons de le voir, un ensemble borné, lequel admet un minimum T. Et l'on peut, quel que soit ε, déterminer une décomposition Δ', telle que la somme correspondante S' soit comprise entre T et $\mathrm{T}+\frac{\varepsilon}{2}$. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les éléments de cette décomposition, n leur nombre; on aura

$$\mathrm{E} = \sum_1^n e_k, \qquad \mathrm{S}' = \sum_1^n \mathrm{M}_k e_k.$$

Soit Δ une autre décomposition quelconque. Nous y distinguerons plusieurs sortes d'éléments. 1° Ceux qui sont intérieurs à l'un des éléments $e_1, \ldots, e_n$, par exemple à e_k; nous les désignerons par $e_{k1}, \ldots, e_{ki}, \ldots$. 2° Ceux qui empiètent sur plusieurs des éléments $e_1, \ldots, e_n$; nous les désignerons par $e'_1, \ldots, e'_l, \ldots$. Nous représenterons enfin par M_{ki}, M'_l les maxima de f dans les éléments e_{ki}, e'_l. On aura évidemment

$$\mathrm{M}_{ki} \overline{\gtrless} \mathrm{M}_k, \qquad \mathrm{M}'_l \overline{\gtrless} \mathrm{M},$$

$$\mathrm{E} = \sum_{k,i} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k$$

et enfin, si S désigne la somme correspondante à la décom-

position considérée,

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k,\,i} M_{ki} e_{ki} + \sum M'_l e'_l \\
&\leqq \sum_k M_k \sum_i e_{ki} + \sum M e'_l \\
&\leqq S' - \sum_k M_k \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big) + M \sum e'_l \\
&\leqq T + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_k (M - M_k) \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big) \\
&\leqq T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k{}' \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big).
\end{aligned}
$$

Enfin, T étant le minimum des sommes S, on aura

$$S \geqq T.$$

De ces deux égalités résulte immédiatement la preuve que, si le diamètre des éléments tend vers zéro, S tend vers T. En effet, les domaines $e_1, \ldots, e_n$ étant mesurables, la différence entre e_k et la somme $\sum e_{ki}$ des nouveaux éléments qui lui sont intérieurs tendra vers zéro avec le diamètre de ces éléments. On pourra donc, après avoir choisi ε aussi petit qu'on voudra, ce qui fixera le nombre n, assigner un nombre δ, tel que si tous les éléments ont un diamètre $< \delta$ chacune des n sommes $e_k - \sum e_{ki}$ devienne moindre que $\dfrac{\varepsilon}{2n(M-m)}$. Dès lors, S sera compris entre T et $T + \varepsilon$.

Ce nombre T se nomme l'*intégrale par excès* de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans le *champ* E.
domaine

43. On voit exactement de la même manière que les sommes s admettent un maximum t et que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que le diamètre maximum

des éléments tende vers zéro, la somme tendra vers t. Ce nombre sera l'*intégrale par défaut* de la fonction f dans le *domaine* E.

46. *Remarques.* — 1° Si E est formé par la réunion de plusieurs domaines mesurables $E_1, E_2, \ldots$, on pourra décomposer ceux-ci en éléments infiniment petits $e_1, e_2, \ldots$, et former pour chacun d'eux la somme $\sum M_k e_k$. La somme correspondante pour le domaine E s'obtiendra par l'addition de ces sommes partielles. Passant à la limite, on voit que l'intégrale par excès de la fonction f, pour le domaine E, est égale à la somme des intégrales analogues pour $E_1, E_2, \ldots$. De même pour l'intégrale par défaut.

2° Nous savons qu'on peut déterminer une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, dont chacun soit intérieur au suivant et à E, et tels que leurs étendues aient pour limite E. L'intégrale (soit par excès, soit par défaut) dans le domaine E sera la limite vers laquelle tend, pour $n = \infty$, l'intégrale dans le domaine E_n. En effet, la différence des deux intégrales est égale à l'intégrale prise dans le domaine $E - E_n$, et son module sera au plus égal à $L(E - E_n)$, quantité qui tend vers zéro quand n tend vers ∞.

3° Nous avons admis, dans tout ce qui précède, que le domaine E a une étendue mesurable. Une nouvelle définition nous permettra de supprimer cette restriction. On peut, en effet, toujours considérer E comme la limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, dont les étendues convergent vers une limite qui, par définition, n'est autre que l'étendue intérieure de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) dans E_n tendra, pour $n = \infty$, vers une limite déterminée. En effet, la différence entre les intégrales dans E_n et E_m $(m > n)$ aura son module au plus égal à

$$L(E_m - E_n) \leqq L(E - E_n),$$

quantité qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Nous

considérerons cette limite de l'intégrale dans E_n comme représentant la valeur de l'intégrale dans E.

47. Nous appellerons *oscillation* de la fonction f dans l'élément e_k la différence $O_k = M_k - m_k$ entre son maximum et son minimum. Cette différence ne pouvant être négative, la différence

$$T - t = \lim \sum M_k e_k - \lim \sum m_k e_k = \lim \sum O_k e_k$$

entre les deux intégrales par excès et par défaut ne pourra être négative. Cherchons à quelles conditions elle sera nulle.

Remarquons, à cet effet, que T étant le minimum des sommes $\sum M_k e_k$ et t le maximum des sommes $\sum m_k e_k$, $T - t$ sera le minimum des sommes $\sum O_k e_k$.

Cela posé, soit ε un nombre positif choisi à volonté et considérons une décomposition quelconque de E en éléments $e_1, \ldots, e_k, \ldots$. Soient $e_i, \ldots$ ceux de ces éléments dans lesquels l'oscillation O_i surpasse ε; $e_l, \ldots$ les autres éléments où l'oscillation $O_l \leqq \varepsilon$. On aura

$$(1) \qquad \sum O_k e_k = \sum O_i e_i + \sum O_l e_l > \varepsilon \sum e_i.$$

Mais, d'autre part, $O_i = M_i - m_i$ ne peut surpasser $M - m$ et $O_l \leqq \varepsilon$; donc

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum O_k e_k \leqq (M - m) \sum e_i + \varepsilon \sum e_l \\ \qquad\qquad \leqq (M - m) \sum e_i + \varepsilon E. \end{cases}$$

Si donc il est possible de déterminer ε de telle sorte que pour aucune décomposition $\sum e_i$ ne s'abaisse au-dessous d'un nombre positif fixe λ, la somme $\sum O_k e_k$ sera toujours supérieure à $\varepsilon\lambda$; et son minimum $T - t$ ne pourra être

moindre que $\varepsilon\lambda$. Au contraire, si, quel que soit ε, on peut trouver une décomposition où $\sum e_i$ soit moindre que tout nombre positif donné, on pourra, en prenant ε assez petit, puis choisissant une décomposition convenable, faire décroître autant qu'on voudra les deux termes du second membre de (2) et rendre ainsi $\sum \mathrm{O}_k e_k$ moindre que tout nombre positif donné. On aura donc

$$\mathrm{T} - t = 0.$$

48. Fonctions intégrables. — Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *intégrable* dans le domaine E, si ses deux intégrales par excès et par défaut

$$\mathrm{T} = \lim \sum \mathrm{M}_k e_k, \qquad t = \lim \sum m_k e_k,$$

prises dans ce domaine, coïncident, ainsi qu'il vient d'être expliqué. Soit, dans ce cas, $(x_k, y_k, \ldots)$ un point choisi arbitrairement dans l'élément e_k; on aura évidemment

$$\mathrm{M}_k \overset{=}{>} f(x_k, y_k, \ldots) \overset{=}{>} m_k,$$

d'où

$$\sum \mathrm{M}_k e_k \overset{=}{>} \sum f(x_k, y_k, \ldots) e_k \overset{=}{>} \sum m_k e_k.$$

La somme $\sum f(x_k, y_k, \ldots) e_k$ tendra donc encore vers la même limite que les deux sommes précédentes. Cette limite se nomme l'*intégrale* de la fonction f dans le domaine E. On la représente généralement par la notation

$$\mathrm{I} = \mathrm{S}_{\mathrm{E}} f(x, y, \ldots) de;$$

S est un signe de sommation, qui signifie limite de somme; de représente l'un des éléments infiniment petits ci-dessus désignés par $e_1, \ldots, e_k, \ldots$; il est sous-entendu que dans

chaque terme de la somme on doit substituer dans f aux variables x, y, ... leurs valeurs en un point de l'élément de que l'on considère; enfin la lettre E, mise en indice, dénote le champ de l'intégration; on peut d'ailleurs la supprimer lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

49. Il est clair que la valeur de l'intégrale I ne dépend pas des variables de sommation $x, y, \ldots$, mais seulement de la nature du champ et de celle de la fonction f. Elle sera d'ailleurs comprise, d'après ce que nous avons vu, entre ME et mE, et son module ne pourra surpasser LE.

Ces derniers résultats sont susceptibles d'être un peu généralisés. Supposons que f soit le produit de deux fonctions φ, ψ dont la première soit intégrable et reste positive dans le champ E. Soient M', m' le maximum et le minimum de ψ dans ce domaine; on aura

$$M' \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) e_k \geqq \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) \psi(x_k, y_k, \ldots) e_k$$
$$\geqq m' \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) e_k$$

et, en passant à la limite,

$$M' \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de \geqq \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) \psi(x, y, \ldots) de$$
$$\geqq m' \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de,$$

et, par suite,

$$\mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) \psi(x, y, \ldots) de = \mu \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de,$$

μ étant une quantité comprise entre M' et m'.

Cette proposition porte le nom de *théorème de la moyenne*.

50. Si le champ E est formé par la réunion de plusieurs domaines mesurables E_1, E_2, ..., l'intégrale E sera évidem-

ment égale à la somme des intégrales relatives à ces champs partiels.

Si E n'est pas mesurable, nous le considérerons, ainsi qu'au n° 46, comme limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$. La limite des valeurs des intégrales prises dans ces domaines sera, par définition, la valeur de l'intégrale dans E.

51. Soient $f', f'', \ldots$ des fonctions intégrables dans un domaine E; $I', I'', \ldots$ leurs intégrales; $c', c'', \ldots$ des constantes.

La fonction

$$f = c'f' + c''f'' + \ldots$$

sera intégrable et aura pour intégrale

$$I = c'I' + c''I'' + \ldots.$$

Il suffit, pour le voir, de passer à la limite dans l'identité

$$\begin{aligned}\sum f(x_k, y_k, \ldots)e_k = \quad & c' \sum f'(x_k, y_k, \ldots)e_k \\ & + c'' \sum f''(x_k, y_k, \ldots)e_k + \ldots.\end{aligned}$$

52. *Le produit $f'f''$ de deux fonctions intégrables est intégrable.* En effet, soient M', m' et M'', m'' les maxima et minima de f' et f'' dans E; M'_k, m'_k, et M''_k, m''_k leurs maxima et minima dans e_k; O', O'', O'_k, O''_k leurs oscillations dans les mêmes domaines.

Supposons d'abord que m' et m'' soient positifs; m'_k, m''_k, M'_k, M''_k l'étant *a fortiori,* on aura, dans tout l'élément e_k,

$$M'_k M''_k \geqq f' f'' \geqq m_k m'_k.$$

L'oscillation O_k du produit $f'f''$ dans cet élément est donc au plus égale à

$$\begin{aligned}M'_k M''_k - m'_k m''_k &= M'_k(M''_k - m''_k) + m''_k(M'_k - m'_k) \\ &\leqq M' O''_k + M'' O'_k,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\lim \sum O_k e_k \leqq M' \lim \sum O''_k e_k + M'' \lim \sum O'_k e_k = 0.$$

Supposons, au contraire, que m', m'' puissent être négatifs. Soit c une constante positive, plus grande que $|m'|$ et $|m''|$. Les fonctions $f'(x, y, \ldots) + c$ et $f''(x, y, \ldots) + c$ seront intégrables et auront pour minima les quantités positives $m' + c$, $m'' + c$. Leur produit sera donc intégrable. D'ailleurs $cf'(x, y, \ldots)$, $cf''(x, y, \ldots)$ le sont également, ainsi que la constante c^2 dont l'oscillation est toujours nulle. Donc, le produit

$$f'f'' = (f' + c)(f'' + c) - cf' - cf'' - c^2$$

sera aussi intégrable.

33. *Si la fonction f est intégrable et si son maximum* M *et son minimum m sont de même signe, $\frac{1}{f}$ sera intégrable.*

En effet, l'oscillation Ω_k de $\frac{1}{f}$ dans l'élément e_k sera

$$\left|\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k}\right| = \left|\frac{M_k - m_k}{M_k m_k}\right| \leqq \frac{M_k - m_k}{m^2} \leqq \frac{O_k}{m^2}.$$

Donc

$$\lim \sum \Omega_k e_k \leqq \frac{1}{m^2} \lim \sum O_k e_k = 0.$$

34. On dit que l'intégrale

$$S_E f(x, y, \ldots)\, de$$

est d'un *ordre de multiplicité n*, si le nombre des dimensions du champ E, dans lequel elle est prise (ou, ce qui revient au même, le nombre des variables indépendantes x, y, $\ldots$) est égal à n.

35. Les théorèmes exposés jusqu'à présent ne dépendent aucunement de ce nombre n. Mais, dans le cas des intégrales

simples, où $n = 1$, il est nécessaire, pour se conformer aux usages reçus, d'introduire quelques légères modifications aux notions précédentes.

Presque toujours, le champ de l'intégration est le domaine d'un seul tenant formé par les nombres compris entre deux nombres fixes a et b. On doit alors partager l'intervalle ab en éléments infiniment petits dx_1, dx_2, ..., et l'on représente l'intégrale par la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On voit que le signe de sommation S a été remplacé par le signe équivalent $\int$, et qu'au lieu de désigner le champ par une seule lettre, on met en évidence ses deux extrémités a, b, qu'on nomme les *limites inférieure et supérieure* de l'intégrale.

Si $b > a$, ce sont là des changements de pure forme; mais si $b < a$, on introduit une nouvelle convention que nous devons signaler. Dans la théorie générale, l'étendue des éléments de était toujours considérée comme étant une quantité positive. Ici, au contraire, nous affecterons chacun des segments dx du signe $-$ si $b < a$ (auquel cas x décroît en variant de a à b).

Il résulte évidemment de cette convention qu'on a

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

En outre,

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Car si $a < b < c$, cette égalité est un cas particulier d'une proposition énoncée au n° 50, et notre présente convention la rend applicable aux autres cas.

Si

$$f(x) = c'f'(x) + c''f''(x) + \ldots,$$

on aura (51)

$$(5)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = c'\int_a^b f'(x)\,dx + c''\int_a^b f''(x)\,dx + \ldots.$$

Si M, m désignent le maximum et le minimum de $f(x)$ dans le champ ab, et L le maximum de son module, l'étendue du champ étant évidemment $|b-a|$, on aura (49)

$$(6)\qquad m\,|b-a| \overline{\overline{<}} \int_a^b f(x)\,dx \overline{\overline{<}} \mathrm{M}\,|b-a|,$$

$$(7)\qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \overline{\overline{<}} \mathrm{L}\,|b-a|.$$

56. Le calcul d'une intégrale multiple d'ordre n se ramène, ainsi qu'on va le voir, lorsque le champ a une étendue mesurable, à celui de n intégrales simples successives.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, $n=2$. Le champ E sera représenté géométriquement par un ensemble de points (x, y) situés dans un plan.

Cela posé, les valeurs de y, auxquelles correspondent des points de E, forment un ensemble borné F. Soit η l'une d'elles. Les valeurs de x qui, associées à η, donnent des points de E, forment un ensemble G_η également borné. Nous ne pouvons pas affirmer que G_η ait une longueur mesurable, ni que la fonction $f(x, \eta)$ y soit intégrable; mais cette fonction étant bornée, on pourra toujours déterminer, dans l'intérieur de G_η, son intégrale par excès et son intégrale par défaut. Ce seront des fonctions de η, que nous pourrons désigner par $J(\eta)$ et $j(\eta)$, et qui sont bornées dans le domaine F.

Nous pourrons donc déterminer, dans l'intérieur de F : 1° l'intégrale par excès de $J(\eta)$, que nous désignerons par K; 2° l'intégrale par défaut de $j(\eta)$, que nous désignerons par k. Comme on a évidemment $J(\eta) \overline{\overline{>}} j(\eta)$, k sera au plus égal à l'intégrale par défaut de $J(\eta)$ et, *a fortiori*, au plus égal à K.

Nous allons montrer, d'autre part, que K est au plus égal à l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}} f(x,y)\,de,$$

prise par excès.

A cet effet, décomposons le plan en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes. Celui de ces rectangles qui est limité par les droites $x=x_i$, $x=x_i+dx_i$, $y=y_k$, $y=y_k+dy_k$ a pour aire $dx_i\,dy_k$; nous le désignerons par e_{ik}, s'il est tout entier intérieur à E, par e'_{ik} s'il contient un point de la frontière de E. Dans chacun des rectangles e_{ik}, la fonction $f(x,y)$ admettra un maximum M_{ik}; et dans les rectangles e'_{ik}, elle ne pourra surpasser un nombre fixe M, maximum de $f(x,y)$ dans le domaine E.

L'ensemble G_η est formé par les points communs à E et à la droite $y=\eta$. Les parallèles aux x que nous avons tracées partagent cette droite en segments, et l'intégrale $\mathrm{J}(\eta)$ est égale à la somme des intégrales partielles prises dans l'intérieur des portions communes à E et à ces divers segments.

Supposons η compris entre y_k et y_k+dy_k, k ayant une valeur déterminée. Soit e_{ik} l'un des rectangles intérieurs correspondants à cette valeur de k. Le segment de la droite $y=\eta$ contenu dans ce rectangle a pour longueur dx_i et se trouve en entier dans E; d'ailleurs la fonction f en chaque point de ce segment a une valeur au plus égale à M_{ik}. La valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $\mathrm{M}_{ik}\,dx_i$.

Soit, d'autre part, e'_{ik} un des rectangles également compris entre les droites $y=y_k$ et $y=y_k+dy_k$, mais qui rencontrent la frontière de E. La longueur (intérieure) de la portion de la droite $y=\eta$ commune à E et à ce rectangle ne peut surpasser dx_i; la valeur de f ne peut y surpasser M; la valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $\mathrm{M}\,dx_i$.

La valeur de $\mathrm{J}(\eta)$ ne pourra donc surpasser la quantité

$$\mu_k=\sum_i \mathrm{M}_{ik}\,dx_i+\mathrm{M}\sum_i dx_i,$$

la première somme s'étendant à ceux des rectangles e_{ik}, et la seconde à ceux des rectangles e'_{ik} où k a la valeur constante que nous avons supposée.

Si donc nous désignons par I_k la valeur de l'intégrale par excès de $J(\eta)$ dans l'intervalle de $\eta = y_k$ à $\eta = y_k + dy_k$, on aura

$$I_k \overset{=}{<} \mu_k dy_k \overset{=}{<} \sum_i M_{ik} e_{ik} + \sum_i M e'_{ik}.$$

Chacun des éléments dy_k intérieurs à F donne une relation de ce genre. Sommant ces égalités, il vient

$$\sum I_k \overset{=}{<} \sum_{i,k} M_k e_{ik} + M \sum_{i,k} e'_{ik}.$$

On remarquera que dans la première somme du second membre figurent tous les rectangles e_{ik} intérieurs à E, car toute parallèle aux x qui rencontre un de ces rectangles, ou passe à une distance de son contour moindre que l'écart de ce contour à la frontière de E, traverse nécessairement ce domaine. Au contraire, quelques-uns des rectangles frontières e'_{ik} pourront manquer dans la seconde somme.

Passons maintenant à la limite en supposant que l'étendue des rectangles décroisse indéfiniment. Le premier membre ΣI_k aura évidemment pour limite l'intégrale K. La première somme du second membre aura pour limite l'intégrale double $\mathbf{S}_E f(x, y)\, de$ prise par excès. La seconde a pour limite zéro, si E est mesurable, comme nous l'avons supposé; car la somme totale des aires des rectangles frontières tend vers zéro, et à plus forte raison la somme $\sum_{i,k} e'_{ik}$, si elle ne s'étend qu'à une partie de ces rectangles.

Notre proposition est donc démontrée.

37. On verra, par un raisonnement tout semblable, que l'intégrale par défaut k est au moins égale à l'intégrale double

$\mathbf{S}_E f(x, y)\,de$, prise par défaut. Mais, par hypothèse, $f(x, y)$ est intégrable. L'intégrale double a donc la même valeur, qu'on la prenne par défaut ou par excès. On aura donc

$$K = \mathbf{S}_E f(x, y)\,de = k,$$

et pour déterminer l'intégrale double, il suffira de calculer K ou k, qui s'obtiennent chacun par deux intégrations simples successives.

58. Supposons en particulier le champ E constitué de telle sorte qu'une parallèle $y = \eta$ à l'axe des x ne coupe sa frontière qu'en deux points ayant pour abscisses $\varphi(\eta)$ et $\Phi(\eta)$. Soit, pour fixer les idées, $\Phi(\eta) > \varphi(\eta)$. Si la fonction $f(x, \eta)$ est intégrable dans l'intervalle de $\varphi(\eta)$ à $\Phi(\eta)$, on aura

$$J(\eta) = j(\eta) = \int_{\varphi(\eta)}^{\Phi(\eta)} f(x, \eta)\,dx.$$

Soient b et B le minimum et le maximum de y dans tout le champ. Si $J(\eta)$ est intégrable de b à B, on aura

$$K = \int_b^B J(\eta)\,d\eta = \int_b^B d\eta \left[\int_{\varphi(\eta)}^{\Phi(\eta)} f(x, \eta)\,dx\right]$$

et en appelant y la variable de sommation, précédemment désignée par η,

$$\mathbf{S}_E f(x, y)\,de = K = \int_b^B dy \left[\int_{\varphi(y)}^{\Phi(y)} f(x, y)\,dx\right].$$

Supposons de même : 1° qu'une parallèle $x = \xi$ à l'axe des y ne coupe la frontière de E qu'en deux points ayant pour ordonnées $\psi(\xi)$ et $\Psi(\xi) > \psi(\xi)$; 2° que $f(\xi, y)$ soit intégrable de $\psi(\xi)$ à $\Psi(\xi)$; 3° que son intégrale $J_1(\xi)$ soit elle-même intégrable de a à A, a étant le minimum et A le maxi-

mum de x dans tout le champ E; on aura de la même manière

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}} f(x, y)\, de = \int_a^{\mathrm{A}} dx \left[\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y)\, dy \right].$$

Lorsque le champ E est un rectangle, on a

$$\psi(x) = a, \qquad \Psi(x) = \mathrm{A}, \qquad \varphi(y) = b, \qquad \Phi(y) = \mathrm{B};$$

et la comparaison des deux valeurs de l'intégrale double donne

$$(8) \quad \int_b^{\mathrm{B}} dy \left[\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \right] = \int_a^{\mathrm{A}} dx \left[\int_b^{\mathrm{B}} f(x, y)\, dy \right].$$

On peut, dans ce cas, représenter cette intégrale double par la notation plus symétrique

$$\int_b^{\mathrm{B}} \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

qui met en évidence les deux intégrations à effectuer successivement; ces deux opérations peuvent d'ailleurs être interverties, comme nous venons de le voir.

IV. — Fonctions continues.

39. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction des n variables x, y, ... définie dans un ensemble E.

Soient $(a, b, \ldots)$ un point déterminé de E; h, k, ... des quantités variables, assujetties à la seule condition que le point $(a + h, b + k, \ldots)$ appartienne aussi à E.

Si, pour toute valeur de la quantité positive ε, on peut déterminer une autre quantité positive δ, telle que l'on ait

$$|f(a + h, b + k, \ldots) - f(a, b, \ldots)| < \varepsilon$$

pour tous les systèmes de valeurs de h, k, ... pour lesquels on a

$$|h| < \delta, \qquad |k| < \delta, \qquad \ldots,$$

on dira que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est *continue au point* $(a, b, \ldots)$.

La même idée peut s'exprimer sous cette forme plus abrégée :

La fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue au point $(a, b, \ldots)$ si

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots)$$

tend vers zéro en même temps que $h, k, \ldots$.

60. Soient $f, f_1, \ldots$ des fonctions des variables $x, y, \ldots$ définies dans E. Les divers systèmes de valeurs simultanées de ces fonctions correspondant aux divers points de E peuvent être considérées comme les points d'un autre ensemble F. Soit maintenant $\varphi(f, f_1, \ldots)$ une fonction des variables $f, f_1, \ldots$ définie pour tout point de F. Il est clair que φ peut être considérée comme une fonction de $x, y, \ldots$ définie pour tous les points de E.

Une semblable expression se nomme une *fonction de fonctions* ou *fonction composée*.

Si les fonctions $f, f_1, \ldots$ sont continues au point $(a, b, \ldots)$ et prennent en ce point des valeurs $\alpha, \alpha_1, \ldots$; si, de plus, la fonction φ est continue au point $(\alpha, \alpha_1, \ldots)$, cette expression, considérée comme fonction de $x, y, \ldots$ sera continue au point $(a, b, \ldots)$.

En effet, pour être assuré que l'accroissement de φ ait son module $< \varepsilon$, il suffit, par hypothèse, que les accroissements de $f, f_1, \ldots$ aient leur module $< \delta$; circonstance qui se produira, par hypothèse, toutes les fois que les modules des accroissements de $x, y, \ldots$ seront moindres qu'une autre quantité fixe η.

Les fonctions $x+y$, $x-y$, xy étant évidemment continues pour tout système de valeurs de x, y, on obtient ce corollaire que *la somme, la différence et le produit de deux fonctions continues sont continus.*

61. *Si f est continue et différente de zéro au point $(a, b, \ldots)$, $\frac{1}{f}$ sera continue en ce point.*

Soient, en effet, Δx, Δy, ... un système d'accroissements donnés à x, y, ...; Δf l'accroissement correspondant de f; celui de $\frac{1}{f}$ sera

$$\frac{1}{f+\Delta f} - \frac{1}{f} = -\frac{\Delta f}{f(f+\Delta f)},$$

et, si $|\Delta f| < |f|$, son module sera au plus égal à

$$\frac{|\Delta f|}{|f|\,[|f| - |\Delta f|]}$$

et sera moindre que ε, si l'on a, en outre,

$$|\Delta f| < \frac{\varepsilon |f|^2}{1+\varepsilon |f|}.$$

Or il suffit, par hypothèse, pour être assuré que ces inégalités sont satisfaites, d'assujettir $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, ... à rester inférieurs à un nombre fixe δ.

62. Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *continue dans un ensemble* E, si elle est continue en chacun de ses points.

Si cet ensemble E *est borné et parfait, la continuité y sera uniforme.*

Ce terme demande quelques explications.

Soit, en général, φ une fonction de deux séries de variables x, y, ... et h, ... Supposons que, pour chacune des valeurs de x, y, ... contenues dans un ensemble E, φ tende vers une limite déterminée lorsque h, ... tendent vers des limites données α, ... L'ensemble de ces valeurs limites sera une certaine fonction Φ des variables x, y, ...

On pourra, par définition, pour chaque nombre positif ε et pour chaque point $(x, y, \ldots)$ de E, assigner un nombre

positif δ, tel que l'on ait toujours

$$(1) \qquad |\varphi(x, y, \ldots, h, \ldots) - \Phi(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que $|h - \alpha|, \ldots$ sont $< \delta$.

Il existe, d'ailleurs, une infinité de nombres δ satisfaisant à cette condition ; car, si elle est remplie pour une valeur de δ, elle le sera pour toute valeur plus petite. Nous désignerons par Δ le maximum de ces nombres δ (si la condition était satisfaite pour toute valeur de δ, Δ serait infini).

Nous obtenons ainsi, pour chaque valeur de ε, un ensemble de nombres positifs Δ correspondant aux divers points de E. Cet ensemble de nombres admettra un minimum η positif ou nul, lequel ne dépend plus que de ε, et la condition (1) sera satisfaite pour tout point de E, tant que l'on aura

$$|h - a| < \eta,$$

Si donc η reste > 0, quelque petit que soit ε, on pourra, pour chaque valeur positive de ε, assigner un autre nombre positif η *indépendant de* $x, y, \ldots$ et tel que l'on ait, pour tout point de E,

$$|\varphi(x, y, \ldots, h, \ldots) - \Phi(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que $|h - a|, \ldots$ sont $< \eta$.

On dira, dans ce cas, que la fonction φ *converge uniformément* vers sa limite Φ dans tout l'ensemble E.

Appliquons cette notion à une fonction $f(x, y, \ldots)$ continue dans l'ensemble E. D'après la définition de la continuité, $f(x+h, y+k, \ldots)$ tend vers $f(x, y, \ldots)$ lorsque h $k, \ldots$ tendent vers zéro. Et la continuité sera uniforme si l'on peut, quel que soit ε, trouver une quantité positive η indépendante de $x, y, \ldots$ et telle qu'on ait, pour tout point de E,

$$|f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que

$$|h| < \eta, \qquad |k| < \eta,$$

63. Ces explications données, procédons à la démonstra-

tion du théorème. Il nous faut établir que le minimum η des nombres Δ correspondant aux divers points $(x, y, \ldots)$ de E est nécessairement > 0.

Supposons que η fût nul. L'ensemble des Δ contiendrait des nombres moindres que toute quantité donnée. Donc E contiendrait une suite indéfinie de points $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ pour lesquels Δ serait respectivement moindre que ε, $\frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$.

Ces points admettraient au moins un point limite Π, puisque E est borné; mais E est, en outre, parfait; il contiendrait donc le point Π.

Cela posé, on pourrait (28) déterminer, dans la suite $p_0, p_1, p_2, \ldots$, une suite indéfinie de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ convergeant vers Π et tels que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aillent en croissant; les valeurs correspondantes de Δ étant moindres que $\frac{\varepsilon}{2^{\alpha_0}}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^{\alpha_n}}, \ldots$ décroîtront indéfiniment.

On pourrait donc trouver dans E un point tel que son écart à Π et la valeur de Δ qui lui correspond fussent simultanément plus petits que toute quantité donnée. Ce résultat entraîne une contradiction. En effet, la fonction f étant continue au point $\Pi = (x_0, y_0, \ldots)$, on peut assigner une quantité positive δ' telle que l'on ait

$$|f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que

$$|h| < \delta', \qquad |k| < \delta', \qquad \ldots,$$

et il est aisé de voir que pour tout point $\Pi' = (x', y', \ldots)$ de E dont l'écart à Π est $< \frac{\delta'}{2}$, le nombre Δ sera au moins égal à $\frac{\delta'}{2}$.

Soit, en effet, $x' = x_0 + h'$, $y' = y_0 + k'$, ... On aura, par hypothèse,

$$|h'| + |k'| + \ldots < \frac{\delta'}{2}$$

et, *a fortiori*,

$$|h'| < \frac{\delta'}{2}, \qquad |k'| < \frac{\delta'}{2},$$

Cela posé, on a, si $|h| < \frac{\delta'}{2}$, $|k| < \frac{\delta'}{2}$, ...,

$$\begin{aligned}
&|f(x'+h, y'+k, \ldots) - f(x', y', \ldots)| \\
&\overline{\overline{<}}\, |f(x'+h, y'+k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\qquad + |f(x', y', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\overline{\overline{<}}\, |f(x_0+h+h', y_0+k+k', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\qquad + |f(x_0+h', y_0+k', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

car $|h+h'|$, $|k+k'|$, ... et $|h'|$, $|k'|$, ... étant $< \delta'$, chacun des deux termes du second membre est $< \frac{\varepsilon}{2}$.

64. Théorème. — *Soient f, f_1, ... des fonctions de x, y, ... continues dans un ensemble* E; *et soit* F *l'ensemble des points* (f, f_1, ...) *qui correspondent aux divers points de* E.

1° *Si* E *est borné et parfait,* F *le sera également.*

2° *Si* E *est d'un seul tenant,* F *le sera également.*

Supposons, en effet, que E soit borné et parfait. Si F n'était pas borné, on pourrait y déterminer un point q_0, où la somme

$$s = |f| + |f_1| + \ldots$$

fût plus grande qu'un nombre donné quelconque L; puis un autre point q_1, où cette somme fût $> 2L$; un autre point q_2, où elle fût $> 4L$, etc. Soient p_0, p_1, p_2, ... les points correspondants de E. Ils seront tous différents, car f, f_1, ... n'ont qu'un seul système de valeurs en chaque point de E. Leur nombre étant infini, ils admettent au moins un point limite Π, lequel appartiendra à E. Et l'on voit, comme au numéro précédent, qu'il devrait exister dans E des points dont l'écart à Π fût moindre que toute quantité donnée, la valeur correspondante de s étant en même temps plus grande

que toute quantité donnée. Ce résultat est contradictoire. Soit, en effet, σ la valeur de s au point Π. La fonction s étant évidemment continue, pour tout point de E dont l'écart à Π est moindre qu'un certain nombre δ, la valeur de s reste comprise entre les deux nombres fixes $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.

Il reste à prouver que F est parfait, c'est-à-dire contient son dérivé F'. Soit q' un point de F' vers lequel converge une suite infinie $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ de points de F. Les points correspondants de E, $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ seront tous distincts, car à chaque point de E répond un seul point de F. Cette suite admet donc au moins un point limite Π, appartenant à E, et contient une suite de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots$ qui convergent vers Π. Les points correspondants de F convergent vers le point q de F qui correspond à Π; mais ils convergent vers q'. Donc, q' se confond avec q et appartient à F.

Supposons enfin que E soit d'un seul tenant et montrons qu'il en est de même de F. Soient q et Q deux points quelconques de F;

$$p = (x, y, \ldots) \qquad \text{et} \qquad P = (X, Y, \ldots)$$

les points correspondants de E; on peut les relier par une chaîne de points intermédiaires $p_1, p_2, \ldots$, telle que l'écart

$$|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| + \ldots$$

de deux points consécutifs

$$p_k = (x_k, y_k, \ldots) \qquad \text{et} \qquad p_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots)$$

et, *a fortiori*, chacun des modules

$$|x_{k+1} - x_k|, \quad |y_{k+1} - y_k|,$$

soit moindre qu'un nombre donné quelconque η.

Or, la continuité étant uniforme dans tout le domaine E, on peut prendre η assez petit ~~pour~~ que toute valeur de k, chacune des quantités

$$|f(x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots) - f(x_k, y_k, \ldots)|$$
$$|f_1(x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots) - f_1(x_k, y_k, \ldots)|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite, leur somme, devienne aussi petite qu'on voudra. Or, cette somme représente l'écart des points q_k et q_{k+1} qui correspondent à p_k et à p_{k+1}. Les points q, q_1, ..., Q forment ainsi une chaîne où l'écart de deux points consécutifs est moindre qu'un nombre ε choisi arbitrairement. Notre proposition est donc établie.

Corollaires. — Considérons en particulier le cas où nous n'avons qu'une seule fonction f de x, y, ... continue dans E : 1° si E est borné et parfait, F admettra un maximum et un minimum et les atteindra (25); 2° si E est d'un seul tenant, F contiendra toute la suite des nombres compris entre son maximum et son minimum (34).

Si au lieu d'une seule fonction continue nous en avons plusieurs f, f_1, ..., la fonction

$$s = |f| + |f_1| + | \dots$$

jouira des propriétés ci-dessus.

65. Soient u, v, ... des fonctions des variables x, y, ... en même nombre que ces dernières, et définies dans un ensemble E. A chaque point $(x, y, \dots)$ de E correspond un point $(u, v, \dots)$; la réunion de ces derniers points forme un ensemble F.

Supposons qu'à chaque point de F corresponde réciproquement un seul point de E; on pourra considérer x, y, ... comme des fonctions de u, v, ... définies dans l'ensemble F. Ce nouveau système de fonctions se nomme l'*inverse* du système de fonctions primitivement considéré.

Si l'ensemble E *est borné et parfait, et les fonctions* u, v, ... *continues dans* E, x, y, ... *seront réciproquement des fonctions de* u, v, ... *continues dans* F.

Il nous faut prouver que, si l'on prend dans F une suite de points $q_1 = (u_1, v_1, \dots)$, ..., $q_n = (u_n, v_n, \dots)$, ... convergeant vers un point χ (lequel appartiendra à F), les points correspondants $p_1 = (x_1, y_1, \dots)$, ..., $p_n = (x_n, y_n, \dots)$, ...

convergeront nécessairement vers le point Π qui correspond à χ.

Supposons qu'il en soit autrement; il existera un nombre ε tel qu'on puisse, quel que soit n, trouver dans la suite $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$ un point p_α, dont l'écart à Π soit $> \varepsilon$. Après celui-là on en pourra trouver un autre p_β, et ainsi de suite.

L'ensemble de ces points $p_\alpha, p_\beta, \ldots$, en nombre infini, admettra au moins un point limite Π', dont l'écart à Π sera encore $\overline{\overline{>}}\, \varepsilon$. On pourra déterminer dans cette suite un point p_λ dont l'écart à Π' soit moindre qu'un nombre donné δ, puis un autre point p_μ plus voisin de Π' que p_λ et dont l'écart à Π' soit $< \frac{\delta}{2}$, et ainsi de suite.

Aux points $p_\lambda, p_\mu, \ldots$ ainsi obtenus, correspondent dans F les point $q_\lambda, q_\mu, \ldots$ qui tendent vers χ. Mais, à cause de la continuité des fonctions $u, v, \ldots$, ils doivent tendre vers le point χ' de F qui correspond à Π'. Donc $\chi = \chi'$, et ce point unique correspond à deux points différents Π et Π' de E, contrairement aux suppositions de l'énoncé.

66. *Une fonction $f(x, y, \ldots)$ continue dans un domaine* E *borné et parfait est intégrable.*

On peut, en effet, quel que soit ε, trouver une autre quantité positive η telle que l'on ait

$$|f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)| < \varepsilon,$$

si $|h|, |k|, \ldots$ sont $< \eta$. Si donc nous décomposons E en éléments e_k de diamètre $< \eta$, l'oscillation O_k sera, dans chacun d'eux, $< \varepsilon$. La condition d'intégrabilité sera donc satisfaite.

V. — Fonctions à variation bornée.

67. Soit $y = f(x)$ une fonction d'une seule variable x, bornée dans un intervalle ab qui contienne les valeurs particulières x_0 et $X > x_0$. Donnons à x une suite de valeurs

croissantes $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X, et soient $y_0, y_1, \ldots$, Y les valeurs correspondantes de y. On aura

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Y} - y_0 = \sum (y_k - y_{k-1}) = p - n,$$

p désignant la somme des termes positifs, n celle des termes négatifs de la somme ci-dessus.

Nous dirons que p est la *variation positive* de y et n sa *variation négative* pour le système de valeurs $x_0, x_1, \ldots$, X. La somme

$$\text{(2)} \qquad t = \sum |y_k - y_{k-1}| = p + n$$

sera sa *variation totale*.

En changeant le nombre et la position des valeurs intermédiaires $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on pourra faire varier ces trois sommes. En particulier, si entre x_{k-1} et x_k on intercale une nouvelle valeur ξ, ces sommes conserveront leur valeur primitive, si $f(\xi)$ est compris entre y_{k-1} et y_k; sinon p et n seront accrus tous deux de la différence entre $f(\xi)$ et celle des quantités y_{k-1}, y_k dont elle est la plus voisine, et t sera accru du double de cette différence.

Cela posé, admettons qu'un des trois systèmes de sommes p, n, t admette un maximum. Il en sera de même de chacun des deux autres, en vertu des équations (1) et (2). On dira, dans ce cas, que y est une *fonction à variation bornée* entre x_0 et X.

68. Les fonctions à variation bornée, telles qu'elles viennent d'être définies, ont pour caractère spécifique de pouvoir être mises sous la forme

$$y = z - u,$$

z et u étant des fonctions positives, bornées et non décroissantes entre x_0 et X.

Pour le démontrer, considérons deux valeurs quelconques x', x'' dans l'intervalle de x_0 à X (x'' étant supposé compris entre x' et X).

Soient

y', y'' les valeurs correspondantes de y;

p', n', t' les variations de y dans l'intervalle xx' pour un choix quelconque de valeurs intermédiaires x_1, x_2, ...;

p'', n'', t'' les variations de y dans l'intervalle $x_0 x''$ en prenant pour valeurs intermédiaires x_1, x_2, ..., x' et d'autres valeurs quelconques x'_1, ... intercalées entre x' et x'';

p, n, t les variations de y dans l'intervalle total $x_0 X$, en prenant pour valeurs intermédiaires x_1, ..., x', x'_1, ..., x''.

On aura évidemment

$$y' - y_0 = p' - n', \qquad y'' - y_0 = p'' - n'',$$
$$p' \leqq p'' \leqq p, \qquad n' \leqq n'' \leqq n, \qquad t' \leqq t'' \leqq t.$$

Mais, par hypothèse, p, n, t admettent des maxima P, N, T. Donc, p', n', t' et p'', n'', t'' admettent aussi des maxima P′, N′, T′, P″, N″, T″, et l'on aura les inégalités

$$P' \leqq P'' \leqq P, \qquad N' \leqq N'' \leqq N, \qquad T' \leqq T'' \leqq T,$$

desquelles il résulte que P′, N′, T′ sont des fonctions de x', positives de leur nature, et, en outre, bornées et non décroissantes de x_0 à X.

Cela posé, en faisant varier le nombre et la position des valeurs intermédiaires x_1, x_2, ..., on peut faire en sorte que p' se rapproche indéfiniment de son maximum P′. La différence $p' - n'$ étant constante, n' se rapprochera en même temps de son maximum N′. L'équation

$$y' - y_0 = p' - n'$$

deviendra donc à la limite

$$y' - y_0 = P' - N',$$

ce qui montre que y' est la différence des deux fonctions positives, bornées et non décroissantes

$$P' + y_0 + c \quad \text{et} \quad N' + c,$$

c désignant une constante positive quelconque $> -y_0$.

Réciproquement, si $y = z - u$, z et u étant des fonctions positives, bornées et non décroissantes entre x_0 et X, sa variation totale t sera limitée; car on a, en désignant par z_0, $z_1, \ldots,$ Z et $u_0, u_1, \ldots,$ U les valeurs de z et de u pour $x = x_0, x_1, \ldots,$ X,

$$t = \sum |y_k - y_{k-1}| = \sum |z_k - u_k - (z_{k-1} - u_{k-1})|$$
$$\overline{\overline{<}} \sum |z_k - z_{k-1}| + \sum |u_k - u_{k-1}| \overline{\overline{<}} \mathrm{Z} - z_0 + \mathrm{U} - u_0.$$

69. Soient $y = z - u$, $y' = z' - u'$ deux fonctions à variation bornée; leur somme

$$z + z' - (u + u'),$$

leur différence

$$z + u' - (u + z')$$

et leur produit

$$zz' + uu' - (uz' + zu')$$

seront évidemment des fonctions de même nature.

Enfin, si y a une variation bornée, et si, de plus, son module a un minimum μ différent de zéro, $\frac{1}{y}$ aura une variation bornée.

En effet, sa variation totale

$$\sum \left| \frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_{k-1}} \right| = \sum \left| \frac{y_k - y_{k-1}}{y_k y_{k-1}} \right| \overline{\overline{<}} \sum \frac{|y_k - y_{k-1}|}{\mu^2}$$

reste toujours inférieure à un nombre fixe.

70. *Une fonction $f(x)$ à variation bornée dans un intervalle ab est intégrable dans cet intervalle.*

On a

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions croissantes et bornées. Il suffit donc de montrer qu'une semblable fonction $\varphi(x)$ est intégrable.

Décomposons le champ ab en éléments e_k; soit O_k l'oscil-

lation de la fonction dans e_k ; on aura

$$\sum O_k e_k \overline{\overline{<}} e \sum O_k,$$

e désignant le plus long des intervalles e_k.

Or, $\varphi(x)$ étant constamment croissante de a à b, $\sum O_k$ représentera évidemment son accroissement total

$$\varphi(b) - \varphi(a).$$

Cette quantité est une constante; d'autre part, si les éléments e_k décroissent indéfiniment, e tend vers zéro; donc $\lim \sum O_k e_k = 0$, et $\varphi(x)$ est intégrable.

71. Soit $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ une fonction bornée, et h un infiniment petit positif. Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant non décroissantes, $\varphi(x-h)$ et $\psi(x-h)$ varieront toujours dans le même sens quand h décroît, sans jamais surpasser les valeurs fixes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Elles tendront donc vers une limite, et leur différence $f(x-h)$ tendra aussi vers une limite, que nous représenterons par $f(x-0)$.

On voit de même que $f(x+h)$ tend vers une limite, qu'on peut représenter par $f(x+0)$.

72. *Une fonction $f(x)$, continue et à variation bornée dans l'intervalle de x_0 à X, est la différence de deux fonctions continues et non décroissantes.*

En effet, $f(x)$ ayant une variation bornée, on aura

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions non décroissantes à variation bornée.

Considérons, en particulier, la fonction $\varphi(x)$. Pour une valeur de x, intermédiaire entre x_0 et X, on aura

$$\varphi(x-\varepsilon) \overline{\overline{<}} \varphi(x) \overline{\overline{<}} \varphi(x+\varepsilon).$$

Si ε tend vers zéro, $\varphi(x-\varepsilon)$, $\varphi(x+\varepsilon)$, qui varient toujours dans le même sens, tendront vers des limites déterminées $\varphi(x-0)$ et $\varphi(x+0)$, et l'on aura encore

$$\varphi(x-0) \overline{\overline{<}} \varphi(x) \overline{\overline{<}} \varphi(x+0).$$

Si la différence $\varphi(x+0)-\varphi(x-0)$ est égale à zéro, la fonction φ sera continue au point x; sinon, cette différence sera positive, et nous dirons que la fonction présente en ce point une *discontinuité* égale à cette différence.

Cette discontinuité peut d'ailleurs se séparer en deux parties : la *discontinuité antérieure* $\varphi(x)-\varphi(x-0)$ et la *discontinuité postérieure* $\varphi(x+0)-\varphi(x)$.

La fonction $\varphi(x)$ n'étant pas définie pour les valeurs de la variable $< x_0$ ou $> X$, nous n'aurons à considérer, pour $x = x_0$, qu'une discontinuité postérieure; pour $x = X$, qu'une discontinuité antérieure.

Soient maintenant a, x deux valeurs quelconques de la variable; $x_1, \ldots, x_n$ une série de valeurs intermédiaires entre celles-là. Formons la somme des discontinuités

$$\varphi(a+0)-\varphi(a)$$
$$+\sum_1^n[\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k-0)]+\varphi(x)-\varphi(x-0),$$

que nous désignerons par

$$S(a, x_1, \ldots, x).$$

Cette somme est au moins égale à $\varphi(a+0)-\varphi(a)$; mais nous allons voir, d'autre part, qu'elle ne peut surpasser $\varphi(x)-\varphi(a)$.

Soit, en effet, ξ_k un point quelconque intermédiaire entre x_k et x_{k+1}; la fonction φ étant non décroissante, on aura

$$\varphi(x_k+0) \overline{\overline{<}} \varphi(\xi_k) \overline{\overline{<}} \varphi(x_{k+1}-0).$$

Soient de même ξ_0 et ξ_n des points respectivement intermé-

diaires entre a et x_1 et entre x_n et x, on aura

$$\varphi(a+0) \overline{\gtrless} \varphi(\xi_0) \overline{\gtrless} \varphi(x_1-0),$$
$$\varphi(x_n+0) \overline{\gtrless} \varphi(\xi_n) \overline{\gtrless} \varphi(x-0).$$

On aura, par suite,

$$\begin{aligned} &S(a, x_1, \ldots, x) \\ &\quad \overline{\gtrless} \varphi(\xi_0) - \varphi(a) + \sum_1^n [\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k-1})] + \varphi(x) - \varphi(\xi_n) \\ &\quad \overline{\gtrless} \varphi(x) - \varphi(a). \end{aligned}$$

Cette somme restant ainsi inférieure à une limite fixe quels que soient le nombre et la position des points de divi sion $x_1, \ldots, x_n$, admettra un maximum $S(a, x)$, que nou appellerons la *discontinuité totale* de la fonction dan l'intervalle de a à x. Ce maximum sera compris entr $\varphi(a+0) - \varphi(a)$ et $\varphi(x) - \varphi(a)$.

D'ailleurs, on a évidemment, d'après la définition de sommes S,

$$S(a, x_1, \ldots, x) = S(a, x_1, \ldots, x_k) + S(x_k, \ldots, x);$$

d'où, en supposant que x_k conserve une valeur constante et passant à la limite

$$S(a, x) = S(a, b) + S(b, x).$$

On voit par là que la fonction $S(x_0, x)$ est une fonction d x non décroissante de x_0 à X.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + S(x_0, x).$$

La nouvelle fonction $\varphi_1(x)$ sera continue et non décrois sante.

On a, en effet, h étant positif,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) &= \varphi(x+h) - S(x_0, x+h) - \varphi(x) + S(x_0, x \\ &= \varphi(x+h) - \varphi(x) - S(x, x+h). \end{aligned}$$

Cette quantité ne peut être négative, car $S(x, x+h)$ est au plus égal à $\varphi(x+h) - \varphi(x)$.

D'ailleurs elle tend vers zéro avec h; car, $S(x, x+h)$ étant au moins égal à $\varphi(x+0) - \varphi(x)$, elle ne saurait être supérieure à $\varphi(x+h) - \varphi(x+0)$, qui tend vers zéro avec h.

La fonction non décroissante $\psi(x)$ admet en chaque point la même discontinuité que $\varphi(x)$, puisque leur différence $\varphi(x) - \psi(x)$ est supposée continue. Donc, dans tout intervalle, $\psi(x)$ aura la même discontinuité totale que $\varphi(x)$, de telle sorte que, en répétant les raisonnements précédents, on aura

$$\psi(x) = \psi_1(x) + S(x_0, x),$$

$\psi_1(x)$ étant une fonction continue et non décroissante et $S(x_0, x)$ représentant la même fonction que tout à l'heure. On aura donc

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI. — Dérivées et intégrales des fonctions d'une seule variable.

73. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable x, définie dans l'intérieur d'un domaine D.

Soient x_0 un point fixe intérieur à D; δ son écart de la frontière de D; tout point $x_0 + h$ où $|h| < \delta$ sera encore intérieur à D.

Si l'expression

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

tend vers une limite fixe lorsque h tend vers zéro, cette limite s'appellera la *dérivée* de $f(x)$ au point x_0 et se représentera par $f'(x_0)$.

Si, pour tous les points intérieurs à D, $f(x)$ admet une

dérivée, l'ensemble de ces valeurs constituera une nouvelle fonction, également définie à l'intérieur de D, qu'on nomme la *dérivée de* $f(x)$ et qu'on représentera, avec Lagrange, par $f'(x)$ ou, avec Cauchy, par $\mathrm{D}f(x)$.

Toute fonction qui a une dérivée est continue.

En effet, l'égalité

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

donne

$$\lim[f(x+h)-f(x)] = f'(x)\lim h = 0.$$

Si $f(x)$ se réduit à une constante, sa dérivée sera nulle. On a, en effet,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0;$$

d'où

$$f'(x) = \lim 0 = 0.$$

Si $f(x)=x$, sa dérivée est égale à 1. Car on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1;$$

d'où

$$f'(x) = \lim 1 = 1.$$

74. Posons, pour abréger,

$$h = \Delta x, \qquad f(x+h)-f(x) = \Delta f(x).$$

On a, par définition,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x);$$

d'où

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \mathrm{R},$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \mathrm{R}\,\Delta x,$$

R tendant vers zéro avec Δx.

Ainsi $\Delta f(x)$ se compose de deux termes; l'un, $f'(x)\,\Delta x$,

simplement proportionnel à Δx, et qui constitue sa valeur principale; l'autre, $R\,\Delta x$, infiniment petit d'ordre plus élevé.

Le premier terme $f'(x)\,\Delta x$ se nomme la *différentielle* de $f(x)$, et se désigne par $df(x)$.

Dans le cas particulier où $f(x)$ se réduit à x, sa dérivée étant égale à l'unité, l'équation de définition

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x \tag{1}$$

se réduit à

$$dx = \Delta x.$$

Substituant cette valeur de Δx dans l'équation générale (1), on en conclura

$$df(x) = f'(x)\,dx, \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Cette nouvelle expression de la dérivée par un quotient de différentielles est très fréquemment employée pour la représenter.

75. *Dérivée d'une somme.* — Soit $y = u + v - w$ une somme algébrique de fonctions ayant les dérivées connues u', v', w'. On aura évidemment, en désignant par Δy, Δu, Δv, Δw les accroissements de ces fonctions correspondant à l'accroissement $h = \Delta x$ donné à la variable indépendante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x};$$

d'où, en faisant tendre Δx vers zéro et passant à la limite,

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' - w'.$$

Dérivée d'un produit. — Soit $y = uv$, u et v ayant des dérivées connues u' et v'. On aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(v + \Delta v) + u\,\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim (v + \Delta v) + u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Si l'on avait $y = uvw\ldots$, on aurait évidemment, d'après cela,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots.$$

Dérivée d'un quotient. — Soit $y = \frac{u}{v}$; on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

et, à la limite,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Dérivée d'une fonction de fonction. — Soit $y = F(u)$, $u = f(x)$ étant lui-même une fonction de x; on aura évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et à la limite, Δu tendant vers zéro avec Δx,

$$y' = \lim\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim\frac{\Delta u}{\Delta x} = F'(u)u' = F'[f(x)]f'(x).$$

Dérivée d'une fonction inverse. — Soit $y = f(x)$ une fonction admettant une fonction inverse, de telle sorte qu'on ait $x = \varphi(y)$. Si l'une de ces fonctions a une dérivée connue, on aura immédiatement la dérivée de l'autre.

On a, en effet, en supposant connue la dérivée de φ, par exemple,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}; \qquad \text{mais} \qquad \lim\frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y).$$

Donc, à la limite,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

76. *Si, en un point donné x, la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on pourra assigner une quantité δ, telle que l'expression*

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ait le signe de $f'(x)\Delta x$ pour toutes les valeurs de Δx de module $< \delta$.

On a, en effet,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x$$

d'où

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \mathrm{R},$$

R tendant vers zéro avec Δx. On peut donc assigner une quantité δ, telle que, si $|\Delta x| < \delta$, $|\mathrm{R}|$ soit $< |f'(x)|$. Alors, $f'(x) + \mathrm{R}$ ayant le même signe que $f'(x)$, $\Delta f(x)$ aura le même signe que $f'(x)\Delta x$.

77. Théorème de Rolle. — *Si $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle de x_0 à X et s'annule pour x_0 et X, sa dérivée s'annulera en un point intermédiaire.*

Les valeurs de x qui sont $\overline{\gtrless} x_0$ et $\overline{\lessgtr}$ X formant un ensemble borné et parfait, la fonction $f(x)$ admet, dans cet intervalle de x_0 à X, un maximum et un minimum et les atteint effectivement (64). Si ce maximum et ce minimum sont nuls tous deux, $f(x)$ sera constamment nulle, sa dérivée aussi, et le théorème sera démontré.

Supposons, au contraire, que le maximum, par exemple, soit différent de zéro. Soit ξ la valeur correspondante de x, laquelle sera différente de x_0 et de X. On aura $f'(\xi) = 0$; car, s'il en était autrement, l'expression

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi)$$

aurait, pour des valeurs suffisamment petites de Δx, le signe de $f'(\xi)\,\Delta x$. En donnant à Δx un signe convenable, on pourrait la rendre positive. Donc ξ ne correspondrait pas à la valeur maximum de f, comme on l'a supposé.

78. *Corollaire.* — Soient $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ trois fonctions admettant des dérivées dans l'intervalle de a à b; considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x+h) & \varphi(x+h) & \psi(x+h) \\ f(x+\theta h) & \varphi(x+\theta h) & \psi(x+\theta h) \end{vmatrix}.$$

C'est une fonction de la variable θ, qui s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$, et qui, d'après les règles de dérivation données ci-dessus (75), admet pour dérivée, dans cet intervalle, le produit de h par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x+h) & \varphi(x+h) & \psi(x+h) \\ f'(x+\theta h) & \varphi'(x+\theta h) & \psi'(x+\theta h) \end{vmatrix}.$$

Ce nouveau déterminant devra donc s'annuler pour une valeur de θ comprise entre 0 et 1.

Posons, en particulier, $\psi(x) = 1$; d'où $\psi'(x) = 0$. L'équation $\Delta = 0$ deviendra

$$\begin{aligned}&[\varphi(x) - \varphi(x+h)]\,f'(x+\theta h)\\ &\quad + [f(x+h) - f(x)]\,\varphi'(x+\theta h) = 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}. \tag{2}$$

Si nous posons, en outre, $\varphi(x) = x$; d'où $\varphi'(x) = 1$, cette dernière équation deviendra

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

ou

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h). \tag{3}$$

Dans cette formule, $x+\theta h$ est une quantité inconnue, mais comprise entre x et $x+h$.

79. Si la dérivée $f'(x)$ est constamment nulle dans cet intervalle, on aura

$$f'(x+\theta h)=0;$$

d'où

$$f(x+h)-f(x)=0.$$

Si cette dérivée, sans être constamment nulle, n'est jamais négative, $f(x+h)-f(x)$ aura le signe de h. Soient, en effet, ξ un des points de l'intervalle de x à $x+h$ pour lesquels la dérivée est positive; $\xi+\delta$ un point infiniment voisin de ξ et compris entre ξ et $x+h$. On aura

$$\begin{aligned}
&f(x+h)-f(x)\\
&\quad=f(x+h)-f(\xi+\delta)+f(\xi+\delta)-f(\xi)+f(\xi)-f(x)\\
&\quad=(x+h-\xi-\delta)f'(\eta)+[f(\xi+\delta)-f(\xi)]+(\xi-x)f'(\eta_1),
\end{aligned}$$

η étant un nombre compris entre $x+h$ et $\xi+\delta$, η_1 un nombre compris entre ξ et x.

Si l'on prend δ assez petit, $f(\xi+\delta)-f(\xi)$ aura le signe de $\delta f'(\xi)$. D'ailleurs, $f'(\xi)$ est positif, $f'(\eta)$, $f'(\eta_1)$ positifs ou nuls. Enfin, δ, $x+h-\xi-\delta$, $\xi-x$ ont le signe de h. Donc, sur les trois termes qui composent $f(x+h)-f(x)$, l'un a sûrement le signe de h, les deux autres ont aussi le signe de h, s'ils ne sont pas nuls. La somme a donc le signe de h.

On voit de même que, si la dérivée $f'(x)$, sans être constamment nulle, n'est jamais négative, $f(x+h)-f(x)$ sera de signe contraire à h.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *La fonction $f(x)$ reste constante dans tout intervalle où $f'(x)$ est constamment nul; elle croît avec x dans tout intervalle où $f'(x)$ reste positif; elle décroît au contraire, quand x croît, dans tout intervalle où $f'(x)$ reste négatif.*

Les deux dernières parties de ce théorème subsistent encore si $f'(x)$ peut s'annuler dans l'intervalle considéré, mais sans changer de signe, pourvu qu'il soit impossible d'isoler dans l'intervalle considéré un intervalle partiel dans lequel $f'(x)$ soit constamment nul.

80. Théorème. — *Si $f'(x)$ reste continu dans un ensemble E borné et parfait, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y tendra uniformément vers sa limite $f'(x)$.*

En effet, cette expression est égale à $f'(x+\theta h)$. Mais $f'(x)$, étant continue, l'est uniformément dans E (63).

Donc, on peut assigner une quantité η indépendante de x, et telle qu'on ait

$$|f'(x+\theta h)-f'(x)|<\varepsilon$$

dès que le module de θh et, *a fortiori*, dès que celui de h est $<\eta$.

81. Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ est intégrable de a à b, l'intégrale définie*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X),$$

où x_0 et X sont compris entre a et b, est une fonction de X à variation bornée et continue. Si de plus $f(x)$ est continue au point X, F(X) aura en ce point une dérivée égale à $f(X)$.

Soit, en effet, μ le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle ab. Décomposons l'intervalle de x_0 à X en intervalles partiels $x_0x_1, \ldots, x_{k-1}x_k, \ldots, x_{n-1}X$. La variation totale de la fonction intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

relative à cette décomposition, sera

$$\sum \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right| \overline{\overline{<}} \sum \mu\,|x_k - x_{k-1}| \overline{\overline{<}} \mu\,|X - x_0|.$$

On voit donc qu'elle ne peut surpasser une limite fixe. Donc, F(X) a une variation bornée.

En second lieu, changeons X en $X + \Delta X$; on aura

$$\Delta F(X) = \int_{x_0}^{X+\Delta X} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro avec Δx, car son module est au plus égal à $\mu\,|\Delta x|$.

Supposons enfin que $f(x)$ soit continue au point X. On aura par définition

$$\int_{X}^{X+\Delta x} f(x)\,dx = \lim \sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ étant des valeurs intermédiaires infiniment voisines les unes des autres, intercalées entre $X = x_0$ et $X + \Delta X = x_n$, et ξ_k une quantité intermédiaire entre x_{k-1} et x_k.

On peut, par hypothèse, quel que soit ε, déterminer une quantité δ, telle que l'on ait, tant que $|h| < \delta$,

$$|f(X+h) - f(X)| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$f(X+h) = f(X) + R,$$

R ayant son module $< \varepsilon$.

Supposons maintenant $|\Delta X| < \delta$. A plus forte raison, les modules des différences $\xi_k - X$ seront $< \delta$, et l'on aura généralement

$$f(\xi_k) = f(X) + R_k,$$

R_k ayant son module $< \varepsilon$.

Substituant ces valeurs des quantités $f(\xi_k)$, il viendra

$$\begin{aligned}\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum [f(X) + R_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\overline{\overline{<}} \sum [f(X)+\varepsilon](x_k - x_{k-1}) \overline{\overline{<}} [f(X)+\varepsilon]\,\Delta X \\ &\overline{\overline{>}} \sum [f(X)-\varepsilon](x_k - x_{k-1}) \overline{\overline{>}} [f(X)-\varepsilon]\,\Delta X.\end{aligned}$$

La quantité

$$\frac{\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}{\Delta X}$$

est donc toujours comprise entre $f(X) + \varepsilon$ et $f(X) - \varepsilon$. Il en sera de même de sa limite

$$\frac{1}{\Delta X}\int_X^{X+\Delta X} f(x)\,dx.$$

On peut, d'ailleurs, prendre ε aussi petit qu'on voudra, à condition de faire décroître suffisamment Δx. On aura donc à la limite

$$F'(X) = \lim \frac{\int_X^{X+\Delta X} f(x)\,dx}{\Delta X} = f(X).$$

Remarque. — Si l'on supposait X constant, mais x_0 variable, l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

serait une fonction de x_0. D'ailleurs, elle est égale et de signe contraire à

$$\int_X^{x_0} f(x)\,dx$$

dont la dérivée est égale, d'après ce qui précède, à $f'(x_0)$. Sa dérivée sera donc $-f'(x_0)$.

82. Le théorème qui précède montre que *toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle de a à b est la dérivée d'une autre fonction* $F(x)$.

Il est, d'ailleurs, aisé de trouver l'expression générale des fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. Soit, en effet,

$$\mathfrak{F}(x) = F(x) + \varphi(x)$$

l'une d'elles. Sa dérivée sera

$$F'(x) + \varphi'(x) = f(x) + \varphi'(x).$$

Pour qu'elle se réduise à $f(x)$, il faut et il suffit que $\varphi'(x)$ soit nul. Donc, $\varphi(x)$ se réduit à une constante c (**79**), qui peut d'ailleurs être choisie arbitrairement.

Lorsqu'on a obtenu, par un procédé quelconque, une fonction $\mathfrak{F}(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, on trouve, sans peine, la valeur correspondante de c. En effet, dans l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \mathfrak{F}(X) + c;$$

faisons $X = x_0$. Le premier membre s'annulant, il vient

$$\mathfrak{F}(x_0) + c = 0,$$

et, par suite,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \mathfrak{F}(X) - \mathfrak{F}(x_0).$$

On nomme *fonctions primitives* ou *intégrales indéfinies* de $f(x)$, les fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. On les désigne par la notation

$$\int f(x)\,dx$$

pour mettre en lumière leur liaison avec l'intégrale définie.

Cette expression, comme on vient de le voir, ne représente pas une fonction déterminée, mais une infinité de fonctions, différant les unes des autres de quantités constantes.

83. *Dérivation des intégrales définies par rapport à un paramètre.* — Soit $f(x, y, \ldots, \alpha)$ une fonction des variables $x, y, \ldots, \alpha$ qui reste continue tant que $x, y, \ldots$ restent intérieurs à un domaine D et α intérieur à un domaine Δ.

Soit E un domaine borné et parfait intérieur à D; pour toute valeur de α intérieure à Δ, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{E}} f(x, y, \ldots, \alpha)\, de$$

aura une valeur déterminée; c'est donc une fonction de α.

Cette fonction est continue; car, si l'on change α en $\alpha + \Delta\alpha$, elle prendra un accroissement

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{I} &= \int_{\mathrm{E}} f(x, y, \ldots, \alpha + \Delta\alpha)\, de - \int_{\mathrm{E}} f(x, y, \ldots, \alpha)\, de \\ &= \int_{\mathrm{E}} \Delta f(x, y, \ldots, \alpha)\, de,\end{aligned}$$

dont le module ne pourra surpasser LE; L étant le maximum du module de $\Delta f(x, y, \ldots, \alpha)$.

Or, soit δ une quantité dont le module soit moindre que l'écart de α à la frontière de Δ; le point $\alpha + \Delta\alpha$ sera encore intérieur à Δ, tant que $|\Delta\alpha|$ sera $\overline{\overline{<}}\, \delta$. La fonction f restera donc continue tant que $x, y, \ldots$ se mouvront dans E et que le paramètre variera entre $\alpha - \delta$ et $\alpha + \delta$. Cet ensemble de valeurs étant évidemment borné et parfait, la continuité de f y sera uniforme; donc L, et par suite $\Delta\mathrm{I}$, tendront vers zéro avec $\Delta\alpha$.

Supposons de plus que f considérée comme fonction de α seulement ($x, y, \ldots$ conservant des valeurs constantes) admette une dérivée; ce sera une nouvelle fonction de $x, y, \ldots, \alpha$, que nous pourrons désigner par $f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)$, et nous aurons

$$\Delta f(x, y, \ldots, \alpha) = f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha + \theta\,\Delta\alpha)\,\Delta\alpha,$$

θ étant une quantité variable, mais toujours comprise entre 0 et 1.

Si nous admettons enfin que f'_α soit continue dans le même champ où nous avons déjà supposé que f l'était, cette expression sera de la forme

$$[f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha) + \mathrm{R}]\,\Delta\alpha,$$

R tendant uniformément vers zéro avec $\Delta\alpha$, dans tout le domaine E.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta\alpha} &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}}[f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha) + \mathrm{R}]\,de \\ &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de.\end{aligned}$$

Soit L_1 le maximum de $|\mathrm{R}|$ dans E; on aura

$$\left|\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de\right| \overline{\gtrless}\ \mathrm{L}_1 \mathrm{E},$$

quantité qui tend vers zéro avec $\Delta\alpha$. On aura donc

$$\lim \frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta\alpha} = \mathbf{S}_{\mathrm{E}} f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\,de.$$

L'intégrale I admet donc une dérivée, représentée par l'intégrale ci-dessus.

84. *Intégration par parties.* — Soit

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$$

une fonction formée du produit de deux autres. On aura

$$d\,f(x) = \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx + \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx$$

et, en intégrant de $x = a$ à $x = b$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx \\ = \int_a^b d\,f(x) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Cette équation ramène, comme on voit, le calcul de l'une

des deux intégrales qui figurent au premier membre au calcul de l'autre, qui pourra se trouver plus simple.

Ce procédé de réduction a reçu le nom d'*intégration par parties*.

Quant au second membre $f(b)-f(a)$, il conviendra, lorsque la fonction $f(x)$ a une expression compliquée, de le représenter par la notation abrégée

$$[f(x)]_a^b.$$

VII. — Dérivées partielles. Différentielles totales.

85. Passons à la considération des fonctions de plusieurs variables.

Soit, par exemple, $u=f(x,y)$ une fonction de deux variables x, y définie dans tout l'intérieur d'un certain domaine D.

Soit (x,y) un point quelconque intérieur à D. On pourra déterminer une quantité δ telle que tous les points

$$|x+\Delta x, y+\Delta y|,$$

où

$$|\Delta x|+|\Delta y|<\delta,$$

soient encore intérieurs à D.

Changeons x en $x+\Delta x$, sans faire varier y. Si l'expression

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

tend vers une limite fixe quand Δx tend vers zéro, cette limite se nommera la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point x, y. On la représente indifféremment par l'une ou l'autre des trois notations suivantes :

$$f'_x(x,y),\quad D_x f(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Si l'expression

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

tend de même vers une limite, ce sera la dérivée partielle par rapport à y, et on la représentera par les notations analogues

$$f'_y(x,y), \quad D_y f(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Si en chaque point intérieur à D il existe des dérivées partielles, chacune d'elles sera une nouvelle fonction de x, y, définie dans l'intérieur de D.

86. Supposons maintenant qu'au lieu de faire varier isolément x, y, on les change simultanément en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, et étudions l'accroissement

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ou, en appliquant la formule (3) du n° 78,

$$f'_x(x+\theta\,\Delta x, y+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\,\Delta y)\,\Delta y,$$

θ et θ_1 étant des quantités plus petites que l'unité.

Faisons tendre Δx et Δy vers zéro. $\theta\,\Delta x$ et $\theta_1\,\Delta y$ tendent *a fortiori* vers zéro, de quelque manière que puissent varier θ et θ_1. Si donc les fonctions f'_x, f'_y sont continues au point x, y, les multiplicateurs de Δx et de Δy tendront respectivement vers $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$.

Soit d'ailleurs E un ensemble borné et parfait quelconque intérieur à D et dans lequel f'_x, f'_y soient continues. Leur continuité sera uniforme. On pourra donc, quel que soit ε, assigner une constante δ telle que pour tout point de cet ensemble les différences entre ces multiplicateurs et leurs limites deviennent $< \varepsilon$ dès que $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ deviennent $< \delta$.

On aura donc

$$(1) \quad \Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y + R\,\Delta x + R_1\,\Delta y,$$

R et R_1 tendant vers zéro avec Δx et Δy (et cela uniformément dans tout l'ensemble E).

On voit donc que $\Delta f(x,y)$ se compose de deux parties, l'une

$$f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y, \tag{2}$$

simplement linéaire en Δx et Δy, l'autre composée de termes d'ordre plus élevé que l'un ou l'autre de ceux qui précèdent.

L'expression (2) se nomme la *différentielle totale* de $f(x,y)$. Les deux termes qui la composent sont les différentielles que l'on obtiendrait en faisant varier une seule des deux variables x, y et laissant l'autre constante. On leur donne le nom de *différentielles partielles*.

Si l'on supposait, en particulier, que la fonction $f(x,y)$ ne fût autre que x, $f'_x(x,y)$ se réduirait à 1, et $f'_y(x,y)$ à 0. L'équation

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y$$

se réduirait donc à

$$dx = \Delta x.$$

En supposant que $f(x,y)$ se réduisît à y, on trouverait de même

$$dy = \Delta y,$$

et, par suite,

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Ainsi qu'on l'a vu aux nos **73** et **79**, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x,y)$ reste constante lorsque x varie seul (et, par suite, se réduise à une fonction de y) est $f'_x(x,y) = 0$.

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x,y)$ ne dépende pas de y est $f'_y(x,y) = 0$.

Ces deux conditions réunies exprimeront que f est indépendant de x et de y, et, par suite, se réduit à une constante. Elles peuvent être résumées en celle-ci

$$df(x,y) = 0.$$

Car, pour que cette expression, égale à

$$f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y,$$

s'annule identiquement, quels que soient Δx et Δy, il faut et il suffit que $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ soient nuls séparément.

87. Admettons que, par un procédé quelconque, on ait mis $\Delta f(x, y)$ sous la forme

$$(4) \qquad \Delta f(x, y) = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \mathrm{S}\,dx + \mathrm{S}_1\,dy,$$

A et B étant indépendants de dx et dy, et S, S_1 tendant vers zéro en même temps que dx, dy; on aura

$$\mathrm{A} = f'_x(x, y), \qquad \mathrm{B} = f'_y(x, y),$$
$$d f(x, y) = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy.$$

Égalons en effet les deux expressions (1) et (4) de $\Delta f(x, y)$; il viendra, en divisant par dx,

$$f'_x(x, y) + \mathrm{R} + [f'_y(x, y) + \mathrm{R}_1]\frac{dy}{dx} = \mathrm{A} + \mathrm{S} + (\mathrm{B} + \mathrm{S}_1)\frac{dy}{dx}.$$

Faisons tendre dx et dy vers zéro, de telle sorte que $\frac{dy}{dx}$ tende vers une valeur fixe λ; on aura à la limite

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\,\lambda = \mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda.$$

Cette égalité, ayant lieu quel que soit λ, se décompose dans les deux suivantes

$$f'_x(x, y) = \mathrm{A}, \qquad f'_y(x, y) = \mathrm{B}.$$

88. La remarque qui précède permet de déterminer aisément les dérivées partielles et la différentielle totale d'une fonction composée.

Soit, en effet, une semblable fonction

$$f(u, v, \ldots),$$

u, v, ... étant elles-mêmes des fonctions des variables indépendantes $x, y, \ldots$.

Pour obtenir la différentielle totale de cette expression, considérée comme fonction de $x, y, \ldots$, donnons à $x, y, \ldots$ des accroissements dx, dy, ... Soient Δu, Δv, ..., Δf les accroissements correspondants de u, v, ..., f. On aura

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \ldots + \mathrm{R}\,\Delta u + \mathrm{R}_1\,\Delta v + \ldots,$$

R, R_1, ... tendant vers zéro avec Δu, Δv, ...

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \ldots + \mathrm{S}\,dx + \mathrm{S}_1\,dy + \ldots\\ &= du + \mathrm{S}\,dx + \mathrm{S}_1\,dy + \ldots,\\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \ldots + \mathrm{T}\,dx + \mathrm{T}_1\,dy + \ldots\\ &= dv + \mathrm{T}\,dx + \mathrm{T}_1\,dy + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

S, S_1, ..., T, T_1, ... tendant vers zéro avec dx, dy, ...

Substituant ces valeurs dans l'expression de Δf, il vient

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \ldots + \rho\,dx + \rho_1\,dy + \ldots\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\right)dx\\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots\right)dy\\ &\quad + \ldots + \rho\,dx + \rho_1\,dy + \ldots,\end{aligned}$$

ρ, ρ_1, ... tendant vers zéro avec dx, dy.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et d'autre part

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \ldots;$$

d'où les deux propositions suivantes :

La dérivée, par rapport à une variable indépendante x, d'une fonction composée $f(u, v, \ldots)$ s'obtient en ajoutant ensemble les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots,$ respectivement multipliées par les dérivées de $u, v, \ldots$ par rapport à x.

La différentielle totale df s'exprime au moyen de $u, v, \ldots, du, dv, \ldots,$ de la même manière que si $u, v, \ldots$ étaient des variables indépendantes.

89. Supposons que des fonctions $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$ satisfassent identiquement à une équation

$$f(u, v, \ldots) = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant une fonction composée de $x, y, \ldots$ dont la valeur est constante et égale à zéro, ses dérivées par rapport à chacune de ces variables sont nulles. On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi *toute identité $f(u, v, \ldots) = 0$ fournira de nouvelles identités en égalant à zéro les dérivées de son premier membre par rapport à chacune des variables indépendantes.*

Ces nouvelles équations peuvent d'ailleurs se concentrer en une seule

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots = 0.$$

90. Nous dirons qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est définie (ou jouit d'une propriété donnée) *aux environs du point*

$(x_0, y_0, \ldots)$ si l'on peut déterminer un nombre positif h, tel, que la fonction soit définie (ou jouisse de la propriété demandée) pour tous les points $(x, y, \ldots)$ où $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, ... sont $\overline{\gtrless} h$.

91. Théorème. — *Soit* $F(x, y, \ldots, u)$ *une fonction des variables* $x, y, \ldots, u$, *laquelle s'annule au point*

$$(x_0, y_0, \ldots, u_0).$$

Supposons : 1° qu'elle soit définie et admette des dérivées partielles continues F'_x, F'_y, ..., F'_u *aux environs de ce point; 2° que* F'_u *ne s'annule pas en ce point.*

On pourra déterminer une fonction des variables x, y, ... *définie aux environs du point* $(x_0, y_0, \ldots)$ *et prenant en ce point la valeur* u_0, *et qui enfin substituée à la place de* u *dans l'équation* $F = 0$, *la rende identiquement satisfaite; cette fonction sera unique et admettra les dérivées partielles*

$$-\frac{F'_x}{F'_u}, \quad -\frac{F'_y}{F'_u},$$

En vertu des hypothèses faites sur l'existence et la continuité des dérivées partielles F'_x, F'_y, ..., F'_u, on pourra déterminer une quantité positive h, telle que, pour tous les points $(x, y, \ldots, u)$ où $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, ..., $|u - u_0|$ sont $\overline{\gtrless} h$, ces dérivées partielles existent et diffèrent de leurs valeurs initiales $(F'_x)_0$, $(F'_y)_0$, ..., $(F'_u)_0$ de moins de ε, en désignant par ε une quantité positive choisie à volonté, mais que nous supposerons moindre en valeur absolue que $(F'_u)_0$.

Si donc on désigne par A la plus grande des quantités $|(F'_x)_0| + \varepsilon$, $|(F'_y)_0| + \varepsilon$, ... et par B la quantité $|(F'_u)_0| - \varepsilon$, on aura, pour tous les points considérés,

$$|F'_x| < |(F'_x)_0| + \varepsilon < A, \qquad |F'_y| < A, \qquad \ldots, \qquad |F'_u| > B.$$

En outre, F'_u conservera toujours le signe de $(F'_u)_0$.

Cela posé, soit $n + 1$ le nombre des variables x, y, ..., u;

désignons par k le plus petit des deux nombres h, $\frac{B}{mA}h$. On aura, pour tous les points $(x_0 + \Delta x, \ldots, u_0 + \Delta u) = (x, \ldots, u)$ où $\Delta x \leqq k$, $\Delta y \leqq k$, ... et $\Delta u \leqq h$,

$$\begin{aligned} F(x, y, \ldots, u) = &\ F(x, y, \ldots, u) - F(x_0, y_0, \ldots, u_0) \\ = &\ F'_x(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0, \ldots, u_0)\,\Delta x \\ &+ F'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1\,\Delta y, \ldots, u_0)\,\Delta y + \ldots \\ &+ F'_u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u + \theta_m\,\Delta u)\,\Delta u. \end{aligned}$$

Chacun des m premiers termes de cette expression a son module $< Ak$. La somme de leurs modules est donc

$$< mAk \leqq Bh.$$

Mais, d'autre part, le dernier terme a son module plus grand que $B\,|\Delta u|$.

Si donc nous posons, en particulier, $\Delta u = \pm h$, ce terme l'emportera sur la somme des autres et donnera son signe à l'expression. D'ailleurs, le facteur

$$F'_u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u + \theta_m\,\Delta u)$$

a toujours le même signe, celui de $(F'_u)_0$. Donc, si l'on pose successivement $\Delta u = h$ et $\Delta u = -h$, on obtiendra, pour $F(x, y, \ldots, u)$, deux valeurs de signe contraire. Mais F est une fonction continue de u; elle s'annulera donc pour une valeur de u intermédiaire entre $u_0 - h$ et $u_0 + h$. Elle ne s'annulera d'ailleurs qu'une fois, car sa dérivée garde le même signe dans tout cet intervalle.

Nous avons donc établi qu'à tout système de valeurs de $x, y, \ldots$, tel que $x - x_0$, $y - y_0$, ... aient leurs modules non supérieurs à k, correspond une valeur unique de u comprise entre $u_0 - h$ et $u_0 + h$ et satisfaisant à l'équation $F = 0$. L'ensemble de ces valeurs constituera une fonction de $x, y, \ldots$ entièrement définie dans ce domaine, et qui se réduit évidemment à u_0 au point $(x_0, y_0, \ldots)$.

Soient d'ailleurs $(x, y, \ldots)$ et $(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots)$ deux points de ce domaine; u et $u + \Delta u$ les valeurs correspon-

dantes de cette fonction. On aura

$$\begin{aligned} 0 = {} & F(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, u+\Delta u) - F(x, y, \ldots, u) \\ = {} & F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)\,\Delta x \\ & + F'_y(x+\Delta x, y+\theta_1\,\Delta y, \ldots, u)\,\Delta y + \ldots \\ & + F'_u(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)\,\Delta u. \end{aligned}$$

Le multiplicateur de Δu ayant son module plus grand que la constante B, cette équation montre que Δu tend vers zéro avec Δx, Δy, ...

Faisons, en particulier, $\Delta y = \ldots = 0$. L'équation se réduit à

$$\begin{aligned} 0 = {} & F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)\,\Delta x \\ & + F'_u(x+\Delta x, y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)\,\Delta u; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)}{F'_u(x+\Delta x, y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)}$$

et à la limite, en faisant tendre Δx vers zéro,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, \ldots, u)}{F'_u(x, y, \ldots, u)}.$$

Les autres dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\cdots$ se détermineraient de même.

92. Théorème. — *Soient* $F_1, \ldots, F_n$ *n fonctions des* $m+n$ *variables* $x, y, \ldots; u, v, w, \ldots$ *s'annulant au point* $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$. *Si l'on suppose : 1° qu'aux environs de ce point, ces fonctions admettent des dérivées partielles continues; 2° que le déterminant*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v} & \frac{\partial F_n}{\partial w} & \cdots \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas en ce point, on pourra déterminer un système de fonctions des variables $x, y, \ldots$ *définies aux en-*

virons du point $(x_0, y_0, \ldots)$, *prenant respectivement en ce point les valeurs* $u_0, v_0, w_0, \ldots$ *et qui enfin, substituées à la place de* $u, v, w, \ldots$ *dans les équations* $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$, *les rendent identiquement satisfaites. Ce système de fonctions est unique, et ces fonctions admettent des dérivées partielles.*

Ce théorème est établi par ce qui précède, dans le cas où l'on n'a qu'une seule équation, et nous pourrons, dans la démonstration, supposer qu'il ait été établi pour le cas de $n - 1$ équations.

Cela posé, pour que J soit $\gtrless 0$ pour le point $x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots$, il faut évidemment qu'une au moins des dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial u_0}, \frac{\partial F_1}{\partial v_0}, \frac{\partial F_1}{\partial w_0}, \cdots$ soit différente de zéro. Soit, par exemple, $\frac{\partial F_1}{\partial u_0} \gtrless 0$. On pourra, d'après le théorème du n° **91**, déterminer une fonction u de $x, y, \ldots; v, w, \ldots$ qui satisfasse identiquement à l'équation $F_1 = 0$ et qui admette des dérivées partielles aux environs du point $x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots$. Substituant cette valeur de u dans les équations suivantes $F_2 = 0, \ldots, F_n = 0$, elles prendront la forme suivante

$$\Phi_2(x, y, \ldots; v, w, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_n = 0.$$

Les fonctions $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$, étant respectivement égales à $F_2, \ldots, F_n$, admettront, aux environs du point $x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots$, des dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v},$$

Le déterminant

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} & \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

des dérivées partielles relatives à $v, w, \ldots$ sera, en négligeant les termes qui se détruisent,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial v}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial w}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \cdot$$

Remplaçant $\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial w}, \cdots$ par leurs valeurs

$$-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial v}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial w}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \cdots,$$

cette expression deviendra égale à $\frac{J}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}$; et, comme $\frac{\partial F_1}{\partial u}$ a au point $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$ une valeur finie et différente de zéro, J_1 sera lui-même fini et différent de zéro.

On pourra donc, par hypothèse, déterminer des fonctions $v, w, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, qui satisfassent identiquement aux équations $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0, \ldots$, qui se réduisent à $v_0, w_0, \ldots$ pour $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ et qui admettent des dérivées partielles aux environs de ce point. Substituant ces valeurs de $v, w, \ldots$ dans l'expression de u, on obtiendra pour $u, v, w, \ldots$ des fonctions de $x, y, \ldots$ satisfaisant aux conditions requises.

93. On donne le nom de *fonctions implicites* à celles qui sont ainsi définies par un système d'équations non résolues

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x, y, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0. \end{cases}$$

La démonstration précédente montre à la fois que ces

fonctions u, v, w, ... existent et qu'elles admettent des dérivées partielles.

L'expression de ces dérivées partielles s'obtiendra d'ailleurs aisément en dérivant les identités (5) par rapport aux diverses variables indépendantes. On trouvera ainsi, en dérivant par rapport à x, par exemple,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\ldots=0, \end{array}\right.$$

système d'équations linéaires dont la résolution donnera $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots$, sous forme de fractions ayant J pour dénominateur. Ce déterminant étant par hypothèse une fonction continue de $x, y, \ldots$ et de $u, v, w, \ldots$ qui sont elles-mêmes continues en $x, y, \ldots$ est une fonction continue de $x, y, \ldots$. D'ailleurs, au point $x_0, y_0, \ldots$, on a $u = u_0$, $v = v_0$, ... et J ne s'annule pas. Donc, dans un certain domaine autour de ce point, J sera encore différent de zéro, et les valeurs de $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ fournies par les équations (6) ne pourront devenir illusoires.

94. Les considérations précédentes fournissent la solution d'une question importante :

Soient

$$(7)\quad u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad u_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

m fonctions des n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ admettant des dérivées partielles continues. Nous dirons que ces fonctions sont *indépendantes* s'il n'existe entre elles aucune relation qui permette d'exprimer l'une d'elles au moyen des autres.

Un système de fonctions tel que (7) étant donné, propo-

sons-nous de rechercher combien il contient de fonctions indépendantes.

A cet effet, formons le tableau des dérivées partielles

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}. \end{array}$$

Avec les éléments communs à un certain nombre de lignes de ce tableau et à un nombre égal de colonnes on peut constituer un déterminant. Construisons tous les déterminants de ce genre. Nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'un des déterminants à p^2 éléments, tel que celui-ci*

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix},$$

ne s'annule pas au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, et si au contraire tous les déterminants à $(p+1)^2$ éléments sont identiquement nuls aux environs de ce point :

1° *Les fonctions $u_1, \ldots, u_p$ seront indépendantes aux environs de ce point.*

2° *Au contraire, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ pourront s'exprimer en fonction de $u_1, \ldots, u_p$.*

1° En effet, soient $v_1, \ldots, v_m$ les valeurs de $u_1, \ldots, u_m$ au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Les équations (7) étant mises sous la forme

$$(8) \qquad f_1 - u_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m - u_m = 0,$$

le déterminant des dérivées partielles de leurs premiers membres par rapport à $x_1, \ldots, x_p, u_{p+1}, \ldots, u_m$ sera évidem-

ment égal à $(-1)^{m-p}D$. Il sera donc différent de zéro au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, v_1, \ldots, v_m)$ et l'on pourra regarder les équations (8) comme définissant implicitement $x_1, \ldots, x_p$, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ en fonctions de $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ aux environs du point $(v_1, \ldots, v_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$. A chaque système de valeurs $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ suffisamment voisines des valeurs initiales $v_1, \ldots, v_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ correspondra un système de valeurs de $x_1, \ldots, x_p$. Donc, réciproquement, $u_1, \ldots, u_p$ pourront, par un choix convenable de valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ prendre tout système de valeurs suffisamment voisin de $v_1, \ldots, v_p$. Donc les fonctions $u_1, \ldots, u_p$ sont indépendantes.

2° D'autre part, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ sont aussi des fonctions des nouvelles variables indépendantes $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$. Mais il est aisé de voir qu'ils ne dépendent pas de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Soient en effet u_i l'une quelconque des fonctions $u_{p+1}, \ldots, u_m$, x_k l'une quelconque des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$; nous allons montrer qu'on a $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0$.

On trouve en effet, en dérivant les équations (8) par rapport à x_k,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_p}{\partial x_k} = 0,$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0;$$

d'où, en éliminant $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_k}, \ldots, \dfrac{\partial x_p}{\partial x_k}$,

$$D\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{et enfin} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0.$$

Donc $u_{p+1}, \ldots, u_m$ sont fonctions de $u_1, \ldots, u_p$ seulement, et la seconde partie du théorème est démontrée.

95. Le cas le plus intéressant de cette analyse est celui où $m = n$. Dans ce cas, pour que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ soient distinctes, il faut et il suffit que le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul.

Cela équivaut évidemment à dire que les différentielles totales

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \end{gathered}$$

sont linéairement distinctes.

Le déterminant J se nomme le *jacobien* des n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$.

On le représente souvent par la notation

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

afin de rappeler qu'il joue dans la théorie de ce système de fonctions un rôle analogue à celui de la dérivée dans celle des fonctions d'une seule variable. Voici quelques exemples de ces analogies :

1° Supposons que $x_1, \ldots, x_n$, au lieu d'être indépendantes, soient elles-mêmes des fonctions de nouvelles variables $y_1, \ldots, y_n$, définies par des équations

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n).$$

Les fonctions

$$u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

deviendront, par la substitution de ces valeurs, des fonctions

de $y_1, \ldots, y_n$, telles que

$$u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_i(y_1, \ldots, y_n),$$

et l'on aura évidemment

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_k}.$$

Le déterminant

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)},$$

formé avec les éléments $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial y_k}$, est évidemment le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

et

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

On a donc

$$(9) \qquad \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Supposons, en particulier, que les variables x soient exprimées en fonction des variables u, de telle sorte que $y_1, \ldots, y_n$ se confondent avec $u_1, \ldots, u_n$. La formule précédente deviendra

$$(10) \qquad \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} = 1.$$

Les formules (9) et (10) sont la généralisation évidente de

celles qui donnent la dérivée d'une fonction de fonction ou d'une fonction inverse.

VIII. — Lignes continues. — Lignes rectifiables.

96. Lignes continues. — Une ligne, étant définie comme le lieu des positions successives d'un point mobile, sera représentée, dans le cas du mouvement plan, par un système de deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

f et φ étant des fonctions de la variable indépendante t, qu'on pourra considérer comme figurant le temps. Si ces fonctions sont continues, la courbe sera dite *continue*.

Supposons que t varie de la valeur initiale t_0 à la valeur finale T. Si les valeurs finales de x, y coïncident avec leurs valeurs initiales, la courbe sera fermée.

Plus généralement, si, pour plusieurs valeurs différentes de t, x et y reprennent le même système de valeurs, la courbe passera plusieurs fois par un même point, que l'on appellera un *point multiple*.

La distance d'un point fixe (ξ, η) au point (t, x, y) d'une ligne continue est une fonction continue de t; si le point (ξ, η) n'est pas sur la courbe, cette fonction ne s'annulera pas; elle admettra donc un minimum différent de zéro, qu'elle atteindra pour une certaine valeur de t, et qu'on pourra appeler la *distance* du point (ξ, η) à la courbe.

Soient de même (t, x, y) et (u, ξ, η) deux points pris respectivement sur deux courbes continues

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad \xi = \mathrm{F}(u), \qquad \eta = \Phi(u).$$

Leur distance sera une fonction continue de t et de u. Si les courbes ne se rencontrent pas, elle atteindra, pour un certain système de valeurs de t et de u, une valeur minimum, qui sera la plus courte distance des deux courbes.

97. Considérons enfin une courbe fermée C continue et sans point multiple, décrite en faisant varier t de t_0 à $T = t_0 + \omega$. Elle sera caractérisée par deux équations

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t),$$

où les fonctions F et Φ sont définies de t_0 à $t_0 + \omega$, et satisfont aux relations

$$F(t_0 + \omega) = F(t_0), \qquad \Phi(t_0 + \omega) = \Phi(t_0).$$

A chaque valeur de t comprise dans cet intervalle correspond un point différent de la courbe, sauf les deux valeurs extrêmes t_0 et $t_0 + \omega$, qui correspondent au même point.

Soient $f(t)$ et $\varphi(t)$ deux fonctions respectivement identiques à $F(t)$ et à $\Phi(t)$ dans l'intervalle de t_0 à $t_0 + \omega$, et définies pour les autres valeurs de t au moyen des relations

$$f(t + \omega) = f(t), \qquad \varphi(t + \omega) = \varphi(t).$$

Ces nouvelles fonctions seront continues, et les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

où t varie de $-\infty$ à $+\infty$ représenteront encore la même courbe que précédemment, décrite une infinité de fois, de telle sorte qu'à chaque point x, y de la courbe correspondent une infinité d'arguments t différant entre eux de multiples de ω.

Cela posé, soient

(t, x, y) et (t', x', y') deux points variables pris sur une même courbe C continue et fermée, sans point multiple:
$\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ leur distance;
$t' - t = h$ la différence de leurs arguments.

Ces arguments n'étant déterminés pour chaque point qu'à un multiple près de ω, on peut évidemment les choisir de telle sorte que h ne surpasse pas $\frac{\omega}{2}$ en valeur absolue. On peut admettre, en outre, qu'il est positif, en échangeant au besoin les deux points x, y et x', y'.

D'après les propriétés des fonctions continues, on pourra, quelle que soit la quantité positive α, déterminer une autre quantité β telle que, pour toute valeur de h moindre que β, on ait

$$|x'-x| < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad |y'-y| < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta < \alpha.$$

Donc, si h tend vers zéro, il en sera de même de Δ.

Réciproquement, si Δ tend vers zéro, il en sera de même pour h. En effet, Δ est une fonction continue de t et de h; car la différence entre la distance des points t, $t+h$ et celle des points $t+dt$, $t+dt+h+dh$ est au plus égale en valeur absolue à la somme des distances du point t au point $t+dt$, et du point $t+h$ au point $t+dt+h+dh$, lesquelles distances tendent vers zéro avec dt et dh. D'autre part, Δ ne s'annule que pour $h=0$. Donc, parmi tous les systèmes de points t, $t+h$, où h n'est pas inférieur à une quantité fixe β', il en existera un pour lequel Δ prendra une valeur minimum α' différente de zéro. Donc, quel que soit d'ailleurs t, Δ ne pourra s'abaisser au-dessous de α' sans que h s'abaisse au-dessous de β'.

Si donc Δ tend vers zéro, h tendra également vers zéro, et, par suite, la distance du point t à un point quelconque de l'arc compris entre les points t, $t+h$ tendra aussi vers zéro.

98. Cela posé, donnons à l'argument t une suite de valeurs infiniment voisines $t_0, t_1, \ldots$, embrassant une période ω. Sur les points de C ainsi déterminés, construisons un polygone inscrit P. La distance d'un quelconque de ses sommets, tel que t_i, aux divers points de l'arc de courbe $t_i t_{i+1}$, et notamment à son autre extrémité t_{i+1}, pourra être supposée $<\delta$, δ étant une quantité infiniment petite, indépendante de la position du point t_i. La distance d'un point quelconque t, pris sur l'arc $t_t t_{i+1}$, à un autre point t' pris sur la corde $t_i t_{i+1}$, sera

$$\overline{\overline{<}}\, tt_i + t_i t' \,\overline{\overline{<}}\, tt_i + t_i t_{i+1} < 2\delta.$$

Le polygone P peut avoir des points multiples; mais on en déduit aisément un polygone réduit P' sans point multiple, et tel que la distance de deux points quelconques t, t', pris sur une partie de la courbe et sur la partie correspondante de ce polygone, soit infiniment petite, et cela uniformément.

Suivons, en effet, le contour du polygone P jusqu'à ce que nous arrivions à un point multiple a; soit $t_i t_{i+1}$ le côté sur lequel il est situé. Continuons à suivre le polygone jusqu'à ce qu'on arrive à un second côté $t_k t_{k+1}$, passant également par le point multiple a. Les droites $t_i t_{i+1}$ et $t_k t_{k+1}$ ayant une longueur $< \delta$ et se coupant au point a, la distance des points t_i et t_{k+1} sera $< 2\delta$, quantité infiniment petite. La différence $t_{k+1} - t_i$ de leurs arguments sera donc $< \varepsilon$ en valeur absolue, ε étant une quantité infiniment petite.

Si cette différence est positive, la distance au point t_i d'un point quelconque de l'arc $t_i t_{i+1} \ldots t_{k+1}$ sera $< \eta$, η étant un infiniment petit. La distance d'un point quelconque t, pris sur la partie $t_i \ldots t_k$ de cet arc à un point quelconque t' pris sur la droite $t_i a$, sera donc $< \eta + \delta$. D'autre part, la distance de deux points quelconques pris sur l'arc $t_k t_{k+1}$ et sur la droite $a t_{k+1}$ est $< 2\delta$. Si donc, en décrivant le contour du polygone P, nous nous abstenons de décrire la boucle $a t_{i+1} \ldots t_k a$, de manière à substituer à la ligne polygonale $t_i t_{i+1} \ldots t_k$ la droite $t_i a$ et, au côté $t_k t_{k+1}$, la partie $a t_{k+1}$ de cette droite, nous obtiendrons un polygone réduit P_1, ayant moins de points multiples que P, et tel qu'en prenant arbitrairement deux points t, t' sur une partie de la courbe et sur la partie correspondante du polygone, leur distance soit constamment $< \alpha$, α désignant un infiniment petit, égal à la plus grande des quantités $\eta + \delta$, 2δ.

Si la différence $t_{k+1} - t_i$ était négative, au lieu de supprimer dans le polygone P la boucle $a t_{i+1} \ldots t_k a$, on supprimerait l'autre boucle $a t_{k+1} \ldots t_i a$, et l'on arriverait évidemment au même résultat.

Si le polygone P_1 présente encore des points multiples, on y supprimera une nouvelle boucle, et ainsi de suite, jusqu'à

ce qu'on arrive à un polygone réduit P', sans point multiple, et jouissant des mêmes propriétés.

99. Ce nouveau polygone P' divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure.

Nous allons établir qu'il existe toujours un point p, situé dans la région intérieure, et dont la plus courte distance à P' surpasse une quantité fixe, différente de zéro.

Soient, en effet, $A = (t_0, x_0, y_0)$ et $B = (t_1, x_1, y_1)$ les deux points de la courbe C pour lesquels x atteint sa plus plus petite valeur x_0 et sa plus grande valeur x_1. La courbe sera formée de deux arcs, l'un allant de A en B, l'autre revenant de B en A.

Considérons sur ces deux arcs deux points (t, x, y) et (t', x', y'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$, β étant une quantité fixe arbitraire, moindre que $\frac{x_1 - x_0}{2}$. La distance de chacun de ces points à l'un quelconque des points A, B étant $\overline{\gtrless} \beta$, les différences des arguments, $t - t_0$, $t_1 - t$, $t' - t_1$, $t_0 - t'$, surpasseront une quantité fixe γ; et, comme l'argument varie de ω quand on décrit la courbe entière, on en conclut que $t' - t$ est compris entre 2γ et $\omega - 2\gamma$. La distance des points t et t' ne pourra donc s'abaisser au-dessous d'une quantité fixe d.

Cela posé, la distance entre deux points choisis à volonté sur deux portions correspondantes de la courbe C et du polygone P' est $< \alpha$, α désignant un infiniment petit. On pourra donc déterminer sur P' deux points A', B', dont les distances à A, B soient respectivement $< \alpha$; et le polygone se composera également de deux arcs polygonaux, l'un allant de A' à B', l'autre revenant de B' à A'. Prenons respectivement sur ces deux arcs deux points (ξ, η), (ξ', η'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta + \alpha$ et $x_1 - \beta - \alpha$. Il existe sur la courbe des points t, t' dont les distances à ces deux-là sont $< \alpha$; leurs abscisses seront comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$; leur distance sera donc $> d$, et la distance des points

(ξ, η), (ξ', η') sera $> d - 2\alpha$, quantité qui deviendra, lorsque α décroît, plus grande que d_1, d_1 étant une quantité quelconque moindre que d.

Cela posé, coupons le polygone réduit par la droite $x = \frac{x_1 + x_0}{2}$. Les points A′ et B′ n'étant pas du même côté de cette droite, elle traversera chacun des deux arcs A′B′ et B′A′ en un nombre impair de points. En remontant cette droite à partir de l'infini négatif, on sera d'abord en dehors du polygone. Au premier point d'intersection, on entrera dans l'intérieur; on en ressortira au second, et ainsi de suite.

Supposons, pour fixer les idées, que la droite en question traverse d'abord l'arc A′B′ en m points consécutifs, puis l'arc B′A′ en n points, puis l'arc A′B′ en m' points, etc. La série des nombres m, n, m', ... contiendra au moins deux nombres impairs. Soit, par exemple, m' le premier nombre de cette nature que contient la série. Le nombre $m + n + m'$ étant impair, le tronçon de droite contenu entre le $(m + n + m')^{\text{ième}}$ point d'intersection et le suivant sera intérieur au polygone; d'ailleurs, ses deux extrémités sont l'une sur l'arc A′B′, l'autre sur l'arc B′A′.

Considérons un point quelconque de ce tronçon de droite. La somme de ses distances aux portions q et q' des lignes polygonales A′B′ et B′A′ comprises entre les deux abscisses $x_0 + \beta + \alpha$ et $x_1 - \beta - \alpha$ est au moins égale à la plus courte distance de ces deux lignes, qui est $> d_1$. Or, lorsque le point se déplace sur le tronçon de droite considéré, sa distance à q, d'abord nulle, varie d'une façon continue et devient plus grande que d_1. Il existe donc sur cette ligne un point p, où cette distance devient égale à $\frac{d_1}{2}$. La distance de ce point à q' sera $> \frac{d_1}{2}$.

D'autre part, l'abscisse de ce point étant égale à $\frac{x_0 + x_1}{2}$, sa distance à un quelconque des autres points des lignes A′B′ ou B′A′, dont l'abscisse est moindre que $x_0 + \beta + \alpha$ ou plus grande

que $x_1 - \beta - \alpha$, sera au moins égale à $\frac{x_1 - x_0}{2} - \beta - \alpha$, quantité qui, pour α assez petit, devient plus grande que toute quantité d_2 inférieure à $\frac{x_1 - x_0}{2} - \beta$. La plus courte distance du point considéré au polygone P′ sera donc $> l$, l désignant la plus petite des quantités $\frac{1}{2} d_1$ et d_2.

100. Cela posé, le lieu des points du plan qui sont à la distance α d'un côté du polygone P′ se compose de deux droites égales et parallèles à ce côté et de deux demi-circonférences reliant leurs extrémités. Traçons ces droites et ces cercles pour chacun des côtés de P′. L'ensemble de ces lignes auxiliaires décomposera le plan en un certain nombre de régions. Considérons, en particulier, celle de ces régions qui contient le point p. Elle est intérieure à P′, et tous les points de son intérieur seront à une distance de P′ plus grande que α. Elle sera limitée par un contour fermé R sans point multiple, dont chaque point sera à la distance α de P′. Le cercle de rayon $l - \alpha$, décrit du point p comme centre, sera en entier dans son intérieur. Au contraire, tous les points de la courbe C lui seront extérieurs, car leur distance à P′ est $< \alpha$.

Décomposons le contour R en éléments infiniment petits par des points de division $a, a', a'', \ldots$. Soient $ab, a'b', \ldots$ des droites de plus courte distance menées de ces points au contour P′. Ces droites auront α pour longueur commune. Elles ne peuvent rencontrer sur leur parcours ni R ni P′; car, si cela avait lieu, on aurait sur R un point dont la distance à P′ serait $< \alpha$. Elles resteront donc dans l'espace annulaire compris entre R et P′. Enfin, elles ne peuvent se couper mutuellement; car, si ab et $a'b'$, par exemple, se coupaient en un point de leur parcours, on aurait évidemment

$$ab' + a'b < ab + a'b' < 2\alpha;$$

l'une des deux distances ab', $a'b$ serait donc $< \alpha$. On aurait

donc ici encore, sur R, un point dont la distance à P′ serait $< \alpha$.

Cela posé, soient ab, $a'b'$ deux lignes de plus courte distance consécutives. A la portion bcb' du polygone P′, comprise entre b et b', correspond un arc BB′ de la courbe C, dont les extrémités B, B′ sont respectivement à une distance $< \alpha$ de b et de b'. La distance rectiligne des points B, B′ sera infiniment petite, car elle est au plus égale à

$$\mathrm{B}b + ba + aa' + a'b' + b'\mathrm{B}',$$

quantité moindre que $4\alpha + aa'$. Donc tous les points de l'arc BB′ sont à une distance infiniment petite de B. Il en sera de même des points de la ligne polygonale bcb', dont chacun est éloigné de moins de α de l'un des points de BB′. D'ailleurs la ligne polygonale $\mathrm{B}baa'b'\mathrm{B}'$ est également infiniment petite. Donc tout le contour polygonal $baa'b'cb$ sera contenu dans un cercle de rayon infiniment petit décrit autour de B, et tous les points de la région intérieure à ce contour seront infiniment voisins de B.

Donc tout point de la région annulaire comprise entre R et P′ sera infiniment voisin de la courbe C.

Le contour R, dont nous venons d'établir les propriétés, est formé de lignes droites et d'arcs de cercle; mais ces arcs de cercle, s'il en existe, tournent leur convexité vers l'intérieur de P′ et, en remplaçant chacun d'eux par un polygone inscrit dont les côtés soient assez multipliés pour que la distance du cercle au polygone soit moindre que la plus courte distance de R à P′ et à C, on obtiendra un nouveau polygone S uniquement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés que R, à savoir : 1° il n'a pas de point multiple; 2° il contient à son intérieur un cercle de rayon fini; 3° il laisse à son extérieur tous les points de P′ et de C; 4° tout point de l'espace annulaire compris entre P′ et S est infiniment voisin de C.

101. On pourrait considérer de même, parmi les régions

dans lesquelles le plan est décomposé par les lignes droites et les cercles auxiliaires, celle qui est extérieure à toutes ces lignes. On verrait aisément, par des considérations toutes semblables à celles que nous avons développées, que tous ses points sont à une distance de P' plus grande que α; qu'elle est limitée par un contour fermé R', sans points multiples, enveloppant le polygone P' et la courbe C, et dont tous les points sont à la distance α de P'; que tous les points de l'espace annulaire, compris entre R' et P', sont infiniment voisins de C; enfin, qu'on peut remplacer R' par un polygone S' exclusivement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés.

102. Il est donc établi qu'on peut, quelle que soit la quantité ε, trouver deux polygones S, S' sans points multiples, intérieurs l'un à l'autre, entre lesquels la courbe se trouve contenue, et tels que chaque point de l'espace annulaire qui les sépare soit à une distance de C moindre que ε.

Soient η, η' les plus courtes distances de ces polygones à la courbe C; ε_1 une quantité moindre que η et η'. On pourra trouver deux nouveaux polygones S_1, S'_1, intérieur et extérieur, dont l'écartement à la courbe soit $< \varepsilon_1$; ils seront évidemment compris entre les deux autres.

Continuant ainsi, on pourra former une série de polygones intérieurs de plus en plus grands $S, S_1, \ldots$, et une série de polygones extérieurs $S', S'_1, \ldots$, comprenant toujours entre eux la courbe C et s'en rapprochant de plus en plus.

Les points du plan seront de trois sortes :

1° Ceux qui, à partir d'un certain terme de la série, deviendront extérieurs aux polygones $S', S'_1, \ldots$; on les nommera *points extérieurs à la courbe;*

2° Ceux qui sont intérieurs à partir d'un certain moment aux polygones $S, S_1, \ldots$; on les nommera *points intérieurs à la courbe;*

3° Ceux qui sont intérieurs à tous les polygones de la suite $S', S'_1, \ldots$, mais extérieurs à tous les polygones S,

$S_1, \ldots$. Ces points, dont la distance à la courbe est moindre que toute quantité assignable, seront situés sur elle.

Il est donc établi que toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini.

103. Deux points intérieurs q, q' peuvent toujours être réunis par un trait polygonal intérieur à la courbe. Il existe, en effet, dans la série S, $S_1, \ldots$ des polygones intérieurs, un polygone S_i qui les contient tous deux. Par les points q, q', menons des droites quelconques qui coupent ce polygone en r et r'. Les droites qr, $q'r'$, jointes à l'un des deux arcs de S_i qui réunissent r à r', satisferont à la question.

Deux points extérieurs pourront être réunis de même sans traverser la courbe.

Au contraire, toute ligne continue D, qui joint un point intérieur q à un point extérieur q', coupera nécessairement la courbe C. Soient en effet u l'argument dont la variation donne les divers points de D; u_0, u' les valeurs de cet argument aux points q, q'.

Considérons l'ensemble des valeurs de u comprises entre u_0 et u'. Celles de ces valeurs qui correspondent à des points intérieurs à C forment un ensemble borné. Soit U son maximum. Le point U, appartenant à la frontière entre les points intérieurs et les points extérieurs, sera sur la courbe C.

104. Une ligne L continue et sans points multiples, tracée dans l'intérieur d'un contour continu C sans point multiple et ayant ses extrémités sur ce contour, partage l'intérieur de C en deux régions séparées.

Plus généralement, considérons une région R du plan limitée : 1° par n contours fermés sans points multiples $C_1, \ldots, C_n$, extérieurs les uns aux autres; 2° par un autre contour analogue C_0 qui les contient dans son intérieur. On pourra, sans partager R en régions séparées, tracer n lignes conti-

nues $L_1, \ldots, L_n$, réunissant respectivement les contours $C_1, \ldots, C_n$ au contour C_0. Mais, cela fait, toute nouvelle ligne continue L_{n+1}, joignant deux quelconques des points frontières de R, divisera R en deux régions distinctes.

On exprimera cette propriété d'une manière abrégée en disant que l'*ordre de connexité* de R est égal à $n+1$.

Ces propositions sont évidentes dans le cas où $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont des polygones, et, si ces contours sont courbes, nous avons vu qu'on peut les considérer comme des limites de polygones.

105. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$, T une série de valeurs du paramètre t; x_0, y_0; x_1, y_1; ...; X, Y les valeurs correspondantes de x, y. Le périmètre du polygone inscrit à la courbe, et dont ces points sont les sommets, sera

$$(1) \qquad \Sigma\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}.$$

Si cette somme tend vers une limite déterminée et constante, lorsque les intervalles $t_{k+1}-t_k$ dans lesquels on a divisé l'intervalle $T-t_0$ décroissent indéfiniment d'amplitude, cette limite représentera la *longueur de l'arc de courbe* correspondant à cet intervalle.

Pour que cette limite existe, il faut, en premier lieu, que la somme (1) ne puisse pas croître indéfiniment par un choix d'intervalles quelconque. Or l'expression

$$\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$$

est au moins égale à $|x_{k+1}-x_k|$ et à $|y_{k+1}-y_k|$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que cette première condition soit remplie, il est donc nécessaire et suffisant que les sommes

$$\Sigma\,|x_{k+1}-x_k|, \quad \Sigma\,|y_{k+1}-y_k|$$

soient limitées et, par suite, que $f(t)$ et $\varphi(t)$ soient des fonctions à variation bornée.

106. Supposons cette condition remplie, et soit L le maximum du périmètre des polygones possibles. Il faudra encore que le périmètre de tout polygone, pour lequel les intervalles $t_{k+1} - t_k$ sont suffisamment petits, soit aussi voisin qu'on voudra de L.

Cherchons à exprimer analytiquement cette condition. Nous savons tout d'abord (71) que les fonctions $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$, $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$, où δ est un infiniment petit positif, tendent vers des limites $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$, $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$.

Cela posé, soit P le périmètre d'un polygone Π correspondant aux points de division $t_1, \ldots, t_k, \ldots$ et soit t un point quelconque intermédiaire entre t_k et t_{k+1}. Introduisons deux nouveaux points de division $t-\delta$ et $t+\delta$ également compris dans l'intervalle de t_k à t_{k+1}. Le nouveau polygone Π' ainsi obtenu différant du premier par le remplacement de l'un de ses côtés par une ligne brisée, son périmètre P' sera $\overline{\gtrless}$ P.

Introduisons le nouveau point de division t. Nous obtiendrons un troisième polygone Π'' qui diffère de Π' par le remplacement du côté qui joint les points $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$ et $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$ par les deux lignes qui joignent respectivement ces deux points au point $f(t)$, $\varphi(t)$.

Supposons que δ décroisse indéfiniment; les points $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$ et $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$ tendront vers les points fixes $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$ et $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$; et, si le point $f(t)$, $\varphi(t)$ n'est pas sur la portion de droite qui joint ces deux points, nous obtiendrons, par l'adjonction du nouveau point de division t, un accroissement de périmètre fini. Soit α cet accroissement. Le périmètre du nouveau polygone étant au plus égal à L, celui du polygone Π ne pourra surpasser L $-\alpha$, et cela quelque rapprochés que soient les points $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$, tant que le point t ne fera pas partie de cette suite.

Nous arrivons donc à ce résultat que, pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle de t_0 à T, le point $f(t)$, $\varphi(t)$ doit être sur le segment de droite qui joint les points $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$ et $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$.

107. Cette condition est suffisante. En effet, soit ε une quantité quelconque. On pourra déterminer une division en intervalles $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots, T$, telle que le périmètre P du polygone correspondant soit $> L - \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $t_0, t'_1, \ldots, t'_i, \ldots$ une autre division en intervalles assujettis à la seule condition d'être tous moindres qu'une quantité fixe δ; nous allons montrer que, si δ est suffisamment petit, le périmètre P' du polygone ainsi obtenu sera plus grand que $L - \varepsilon$.

Considérons, en effet, un troisième polygone obtenu en prenant, pour points de division, tous les points t_k et tous les points t'_i. Son périmètre P'' sera $\overline{\gtrless} P > L - \frac{\varepsilon}{2}$.

Évaluons, d'autre part, la différence entre P'' et P', en supposant que δ ait été pris $< \delta'$, δ' désignant le plus petit des intervalles $t_{k+1} - t_k$, auquel cas deux quelconques des points t_k seront séparés au moins par un point de la série t'_i.

Soient n le nombre total des points de la première division; n' le nombre de ceux de ces points qui n'appartiennent pas à la seconde division. Soient, enfin, t_k l'un de ces derniers points, t'_i et t'_{i+1} ceux des points t' entre lesquels il tombe. Le côté $t'_i\, t'_{i+1}$ du polygone P' sera remplacé dans P'' par les deux côtés $t'_i\, t_k$, $t_k\, t'_{i+1}$.

Or la distance $t'_i\, t_k$ diffère de la distance $(t_k - 0,\ t_k)$ d'une quantité au plus égale en valeur absolue à la distance $(t'_i,\ t_k - 0)$; de même $t_k\, t'_{i+1}$ diffère de $(t_k,\ t_k + 0)$ d'une quantité au plus égale en valeur absolue à $(t'_{i+1},\ t_k + 0)$; enfin $t'_i\, t'_{i+1}$ diffère de $(t_k - 0,\ t_k + 0)$ [lequel est égal à $(t_k - 0,\ t_k) + (t_k,\ t_k + 0)$] d'une quantité au plus égale en valeur absolue à $(t'_i,\ t_k - 0) + (t_k + 0,\ t'_{i+1})$. On aura donc

$$t'_i\, t_k + t_k\, t'_{i+1} - t'_i\, t'_{i+1} \overline{\gtrless}\, 2(t'_i,\ t_k - 0) + 2(t_k + 0,\ t'_{i+1}).$$

Or les distances $(t'_i, t_k - 0)$ et $(t_k + 0, t'_{i+1})$ tendent vers zéro avec δ. On peut donc trouver une quantité δ_k, telle que, pour toute valeur de δ inférieure à δ_k, chacune de ces distances soit moindre que $\frac{\varepsilon}{8n}$; on aura dès lors

$$t'_i t_k + t_k t'_{i+1} - t'_i t'_{i+1} \overline{\gtrless} \frac{\varepsilon}{2n}.$$

A chaque point t_k de la première division qui n'appartient pas à la seconde, correspond ainsi une quantité δ_k. Si nous prenons pour δ une quantité moindre que la plus petite des quantités $\delta_1, \ldots, \delta_k, \ldots$ et δ', nous aurons donc

$$P'' - P' = \sum_k (t'_i t_k + t_k t'_{i+1} - t'_i t'_{i+1}) \overline{\gtrless} n' \frac{\varepsilon}{2n} \overline{\gtrless} \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$P' \overline{\gtrless} P'' - \frac{\varepsilon}{2} \overline{\gtrless} L - \varepsilon.$$

108. Si l'arc de courbe compris entre les points t_0 et T a une longueur déterminée L, et qu'on prenne un point t quelconque intermédiaire entre t_0 et T, les deux arcs partiels $t_0 t$ et tT auront également des longueurs déterminées L', L'', et l'on aura

$$L' + L'' = L.$$

En effet, L est, par définition, le maximum du périmètre des polygones inscrits à l'arc t_0T. Parmi ces polygones, il en est qui n'ont pas de sommet en t; mais, en intercalant ce nouveau sommet, on ne fait qu'accroître le périmètre. On peut donc, pour la détermination de L, ne considérer que les polygones qui admettent t pour sommet. Or ceux-ci sont formés de deux polygones, inscrits, l'un dans l'arc $t_0 t$, l'autre dans l'arc tT. En appelant P, P', P'' les périmètres des trois polygones, on aura toujours

$$P' + P'' = P.$$

Donc, P étant limité, P' et P'' le seront également, et L, maximum de P, sera la somme des maxima partiels L', L''.

Il résulte de là que l'arc $t_0 t$, où le point t est considéré comme variable de t_0 à T, est une fonction de t, essentiellement positive et croissante. Nous la désignerons par s. Cherchons quelles nouvelles conditions sont nécessaires pour qu'elle soit continue.

109. Lorsque t s'accroît de la quantité h, l'accroissement de l'arc est évidemment égal à la longueur de l'arc compris entre les points t et $t+h$. Intercalons donc, entre t et $t+h$, une série de valeurs intermédiaires $t_1, \ldots, t_n$; écrivons, pour plus de symétrie, t_0 et t_{n+1} à la place de t et $t+h$; l'accroissement cherché Δs sera le maximum de l'expression

$$\sum_0^n \sqrt{[f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2 + [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2},$$

lorsqu'on fait varier le mode de division de l'intervalle; on aura, par suite,

$$\begin{aligned} \Delta s &\geqq f(t_1) - f(t), \\ &\geqq \varphi(t_1) - \varphi(t). \end{aligned}$$

Faisant tendre t_1 vers t, les seconds membres de ces inégalités tendront respectivement vers

$$f(t+0) - f(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t+0) - \varphi(t).$$

Si donc ces expressions ne sont pas nulles, Δs ne pourra décroître indéfiniment avec h, et l'arc sera discontinu.

En changeant le signe de h, on verra de même que l'arc sera discontinu, si

$$f(t-0) - f(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t-0) - \varphi(t)$$

ne sont pas nuls.

110. Supposons, au contraire, qu'on ait

$$\begin{aligned} f(t-0) &= f(t+0) = f(t), \\ \varphi(t-0) &= \varphi(t+0) = \varphi(t), \end{aligned}$$

ce qui exprime que $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont continues. L'arc s sera lui-même continu.

En effet, on aura (72)

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t),$$
$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

$f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ étant des fonctions continues et non décroissantes. On aura, par suite,

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \sqrt{[f(t_{k+1})-f(t_k)]^2+[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2}\\
&\leqq \sum_0^n \left[\begin{array}{l} \quad |f(t_{k+1})-f(t_k)| \\ +|\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)| \end{array}\right]\\
&\leqq \sum_0^n \left[\begin{array}{l} \quad |f_1(t_{k+1})-f_1(t_k)-f_2(t_{k+1})+f_2(t_k)| \\ +|\varphi_1(t_{k+1})-\varphi_1(t_k)-\varphi_2(t_{k+1})+\varphi_2(t_k)| \end{array}\right]\\
&\leqq \sum_0^n \left\{\begin{array}{l} \quad [f_1(t_{k+1})-f_1(t_k)]+[f_2(t_{k+1})-f_2(t_k)] \\ +[\varphi_1(t_{k+1})-\varphi_1(t_k)]+[\varphi_2(t_{k+1})-\varphi_2(t_k)] \end{array}\right\}\\
&= [f_1(t+h)-f_1(t)]+[f_2(t+h)-f_2(t)]\\
&\quad+[\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)]+[\varphi_2(t+h)-\varphi_2(t)].
\end{aligned}$$

Or chacun des quatre termes de cette expression tend vers zéro avec h, puisque f_1, f_2, φ_1, φ_2 sont des fonctions continues.

Nous nommerons *courbes rectifiables* celles dont l'arc a une longueur déterminée, fonction continue de t. D'après ce que nous venons de voir, on les reconnaît à ce caractère que les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont continues, et à variation limitée.

111. Si les fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ ont des dérivées continues au point t, l'arc s aura lui-même une dérivée, égale à $\sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}$.

On a, en effet,

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k),$$
$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau'_k)(t_{k+1} - t_k),$$

τ_k et τ'_k étant compris entre t_k et t_{k+1} et, *a fortiori*, entre t et $t+h$.

On en conclut

$$\sum \sqrt{[f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2 + [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2}$$
$$= \sum (t_{k+1} - t_k)\sqrt{f'^2(\tau_k) + \varphi'^2(\tau'_k)}.$$

Or $\sqrt{f'^2(\tau_k) + \varphi'^2(\tau'_k)}$ diffère de $\sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)}$ d'une quantité moindre en valeur absolue que

$$\sqrt{[f'(\tau_k) - f'(t)]^2 + [\varphi'(\tau'_k) - \varphi'(t)]^2}.$$

D'ailleurs les fonctions f' et φ' sont continues ; donc, en prenant h assez petit, on pourra rendre $|f'(\tau_k) - f'(t)|$ et $|\varphi'(\tau'_k) - \varphi'(t)|$ moindres qu'une quantité positive quelconque ε.

On aura donc

$$\left|\sqrt{f'^2(\tau_k) + \varphi'^2(\tau'_k)} - \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)}\right| < \varepsilon\sqrt{2}.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{1}{h}\sum \sqrt{[f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2 + [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2}$$

sera compris entre

$$\frac{1}{h}\sum (t_{k+1} - t_k)\left[\sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)} + \varepsilon\sqrt{2}\right]$$
$$= \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)} + \varepsilon\sqrt{2}$$

et

$$\sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)} - \varepsilon\sqrt{2}.$$

Multiplions indéfiniment les valeurs intermédiaires $t_1, \ldots,$

$t_k, \ldots$; la somme (2) tendra vers $\frac{\Delta s}{h}$, qui sera encore compris entre les deux nombres ci-dessus.

Si h décroît indéfiniment, on pourra faire tendre en même temps ε vers zéro, et l'on aura à la limite

$$\lim \frac{\Delta s}{h} = \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)}.$$

112. La région R du plan intérieure à une ligne rectifiable (fermée et sans point multiple) est toujours quarrable.

Partageons, en effet, le périmètre L de cette ligne en arcs égaux de longueur $\frac{L}{n}$, et décomposons le plan en carrés de côté $\frac{L}{n}$. Il est évident que chacun des n arcs obtenus ne pourra rencontrer plus de quatre de ces carrés. La somme des aires des carrés qui rencontrent la frontière de R est donc au plus égale à $4n\frac{L^2}{n^2} = \frac{4L^2}{n}$. Cette expression tend vers zéro quand n croît indéfiniment; R est donc quarrable.

113. Une courbe dans l'espace peut être représentée par trois équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Elle sera continue, si les fonctions f, φ, ψ le sont.

Nous appellerons *longueur* d'un arc de cette courbe la limite du périmètre d'un polygone inscrit.

Des raisonnements identiques à ceux des nos 105 à 111 montrent :

1° Que pour que cet arc s existe et soit une fonction continue de t, auquel cas nous dirons que la courbe est rectifiable, il faut et il suffit que $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient continues, et à variation bornée;

2° Que s est une fonction croissante de t;

3° Que si $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent au point t des dérivées continues, s admettra une dérivée, égale à

$$\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}.$$

IX. — Fonctions élémentaires.

114. Avant d'aller plus loin, il convient de passer en revue certaines fonctions particulièrement simples, que l'on désigne sous le nom de *fonctions élémentaires*.

Fonctions rationnelles. — Considérons l'expression Ax^n, où A est une constante et n un entier. En lui appliquant la règle du n° **75** pour former la dérivée d'un produit, il viendra

$$\frac{(Ax^n)'}{Ax^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots = \frac{n}{x},$$

$$(Ax^n)' = nAx^{n-1}.$$

La dérivée d'un polynôme entier

$$Ax^n + Bx^m + \ldots$$

sera donc

$$nAx^{n-1} + mBx^{m-1} + \ldots.$$

Celle d'une fonction rationnelle $\frac{u}{v}$, quotient de deux polynômes, s'en déduira immédiatement (**75**).

115. *Logarithme.* — On donne le nom de *logarithme arithmétique de x* à la fonction définie par l'équation

$$\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{d\alpha}{\alpha},$$

la variable x étant supposée positive.

Cette fonction a pour dérivée $\frac{1}{x}$, et s'annule pour $x = 1$. Elle est d'ailleurs croissante.

On a, d'après cette définition, y désignant une seconde

variable positive,

$$d \operatorname{Log} xy = \frac{dxy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d \operatorname{Log} x + d \operatorname{Log} y,$$

d'où

$$\operatorname{Log} xy = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C, posons $x = 1$, $y = 1$; les logarithmes s'annulent tous; donc $\mathrm{C} = 0$, et

$$(1) \qquad \operatorname{Log} xy = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y.$$

Pour la valeur particulière $y = \frac{1}{x}$, cette équation devient

$$(2) \qquad \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} \frac{1}{x} = 0.$$

Si x tend vers ∞, il en est de même de son logarithme. Soit, en effet, a un nombre quelconque > 1; dès que x sera devenu plus grand que a^n, on aura

$$\operatorname{Log} x > \operatorname{Log} a^n > n \operatorname{Log} a,$$

quantité qui tend vers ∞ avec n, $\operatorname{Log} a$ étant positif.

Si x tend vers 0, $\operatorname{Log} x$ tendra vers $-\infty$ en vertu de l'équation (2).

116. *Exponentielle.* — Le logarithme de x, étant une fonction croissante, ne reprend pas deux fois la même valeur. Il a donc une fonction inverse. On la nomme *fonction exponentielle*, et on la représente par e^x. Cette fonction est ainsi définie par l'équation

$$x = \operatorname{Log} y.$$

Elle croît avec x, est égale à zéro pour $x = -\infty$; à 1 pour $x = 0$; à ∞ pour $x = +\infty$. Pour $x = 1$, elle prend une valeur déterminée e, que nous calculerons plus tard.

Elle a pour dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y = e^x.$$

Donc

$$(3) \qquad (e^x)' = e^x.$$

Posons enfin dans la formule (1)

$$\operatorname{Log} x = u, \qquad \operatorname{Log} y = v;$$

d'où

$$\operatorname{Log} xy = u + v.$$

On en déduit

$$x = e^u, \qquad y = e^v, \qquad xy = e^{u+v}$$

et, par suite,

$$(4) \qquad e^u e^v = e^{u+v}.$$

En particulier, si $v = -u$, il viendra

$$(5) \qquad e^u e^{-u} = 1.$$

117. *Fonction x^m.* — Nous désignerons par le symbole x^m la fonction définie par l'équation

$$(6) \qquad y = e^{m \operatorname{Log} x},$$

x étant une variable positive.

Si m est un entier positif, elle est, d'après la formule (4), le produit de m facteurs égaux à $e^{\operatorname{Log} x}$ ou x; si m est négatif, ce sera le produit de m facteurs égaux à $\frac{1}{x}$. Si m est une fraction $\frac{p}{q}$, on aura, en élevant l'équation (6) à la puissance q,

$$y^q = e^{p \operatorname{Log} x} = x^p.$$

Donc y sera la racine positive de l'équation binôme ci-dessus. Cette racine positive, évidemment unique, se nomme la *racine $q^{\text{ième}}$ arithmétique* de x^p.

Généralement, $y = x^m$ tendra vers 0, 1, $+\infty$ lorsque $m \operatorname{Log} x$ tendra respectivement vers $-\infty$, 0, $+\infty$. Si donc on suppose m positif et croissant indéfiniment, x^m tendra vers 0 ou vers ∞ suivant que $x < 1$ ou $x > 1$.

On a évidemment

$$(7) \qquad x^m x^n = e^{m \operatorname{Log} x} e^{n \operatorname{Log} x} = e^{(m+n) \operatorname{Log} x} = x^{m+n},$$

$$(8) \qquad (x^m)^n = e^{n \operatorname{Log} x^m} = e^{mn \operatorname{Log} x} = x^{mn}.$$

On trouve enfin, en appliquant la règle pour dériver les fonctions de fonctions

$$(9) \qquad (x^m)' = e^{m \operatorname{Log} x} \frac{m}{x} = x^m \frac{m}{x} = m x^{m-1},$$

formule qui n'avait été établie jusqu'à présent que pour m entier positif.

118. *Fonctions trigonométriques.* — Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$ étant définies comme dans les éléments, il est aisé de déterminer leurs dérivées.

Remarquons d'abord que, si l'on change x en $x + h$, les accroissements de $\sin x$ et de $\cos x$ seront les projections de l'arc h sur les deux axes coordonnés, et leur module ne pourra surpasser h. Donc $\sin x$ et $\cos x$ sont continus.

On a en second lieu

$$2 \sin \frac{h}{2} = \text{corde } h < h < 2 \operatorname{tang} \frac{h}{2},$$

d'où

$$\cos \frac{h}{2} < \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} < 1.$$

Si h tend vers zéro, $\cos \frac{h}{2}$ tend vers 1; donc

$$\lim \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = 1.$$

Cela posé, on a

$$
(10) \quad \begin{cases} (\sin x)' = \lim \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\[2ex] \quad = \lim \dfrac{2 \sin \dfrac{h}{2}}{h} \cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right) = \cos x \end{cases}
$$

et, par suite,

$$
(11) \quad (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,
$$

$$
(12) \quad (\operatorname{tang} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},
$$

$$
(13) \quad (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
$$

119. *Fonctions trigonométriques inverses.* — Si nous faisons parcourir à la variable x la suite des valeurs comprises entre $k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $k\pi + \frac{\pi}{2}$, la fonction $u = \sin x$ prendra successivement les valeurs comprises entre -1 et $+1$, et chacune une seule fois. On peut donc réciproquement considérer x comme une fonction de u, définie dans l'intervalle de -1 à $+1$.

Cette fonction $\varphi_k(u)$, inverse de $\sin x$, admettra une dérivée égale à

$$
\frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1 - u^2}},
$$

le radical devant être pris avec sa valeur arithmétique; car, lorsque x est compris entre $k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $k\pi + \frac{\pi}{2}$, son cosinus a le signe de $(-1)^k$.

La dérivée précédente cesse d'ailleurs d'exister, en devenant infinie, pour les valeurs extrêmes $u = \pm 1$.

120. Considérons l'arc de courbe représenté par l'équation

$$
x = \varphi_k(u).
$$

Aux deux extrémités de cet arc, on a respectivement

$$x = k\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad u = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^k,$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad u = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \quad (-1)^k.$$

Si donc k est un nombre pair $2m$, on aura pour $u = 1$,

$$x = 2m\pi + \frac{\pi}{2},$$

et pour $u = -1$,

$$x = 2m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\varphi_{2m}(1) = 2m\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_{2m}(-1) = 2m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Au contraire, si k est un nombre impair $2m+1$, on aura

$$\varphi_{2m+1}(1) = (2m+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_{2m+1}(-1) = (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il résulte de ces formules qu'on a

$$\varphi_{2m}(1) = \varphi_{2m+1}(1), \qquad \varphi_{2m}(-1) = \varphi_{2m-1}(-1).$$

L'arc de courbe, représenté par l'équation

$$x = \varphi_k(u),$$

se raccordera donc à ses deux extrémités avec les arcs représentés par les équations

$$x = \varphi_{k-1}(u), \qquad x = \varphi_{k+1}(u).$$

On se trouve donc naturellement conduit à considérer l'ensemble de ces divers arcs comme constituant une courbe unique dont ils seraient les tronçons, et les fonctions $\varphi_k(u)$ comme formant autant de branches d'une fonction unique, laquelle aura pour chaque valeur de u une infinité de valeurs

distinctes, au lieu d'une seule, comme nous l'avons admis jusqu'à présent. Cette fonction, inverse de $\sin x$, se représente par $\operatorname{arc}\sin x$; et nous désignerons par $\operatorname{Arc}\sin x$ celle de ses branches qui correspond à $k=0$.

121. Soit

$$u = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Si l'on désigne par $\operatorname{arc}\cos u$ la fonction inverse, on aura

$$x = \operatorname{arc}\cos u, \qquad \frac{\pi}{2} - x = \operatorname{arc}\sin u,$$

d'où

$$(14)\qquad \begin{cases} \operatorname{arc}\cos u = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin u, \\ (\operatorname{arc}\cos u)' = -(\operatorname{arc}\sin u)' = -\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-u^2}}, \end{cases}$$

le signe dépendant, comme tout à l'heure, de celle des branches de la fonction que l'on considère.

122. L'inversion de la fonction

$$u = \operatorname{tang} x$$

donne lieu à des considérations analogues aux précédentes.

Si l'on fait varier x entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$, u prendra toutes les valeurs réelles, chacune une seule fois. On pourra donc considérer réciproquement x comme une fonction de u, inverse de $\operatorname{tang} x$. Cette fonction $\psi_k(u)$ admettra pour dérivée

$$(15)\qquad \frac{1}{(\operatorname{tang} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \frac{1}{1+u^2}.$$

Les diverses fonctions $\psi_k(u)$ pourront être considérées comme autant de branches d'une fonction à valeurs multiples, que l'on représente par $\operatorname{arc}\operatorname{tang} u$. Nous désignerons par $\operatorname{Arc}\operatorname{tang} u$ celle de ces branches qui s'annule pour $u=0$.

X. — Dérivées et différentielles d'ordre supérieur.

123. Soit $u = f(x)$ une fonction de x, ayant une dérivée u'. Si cette nouvelle fonction admet elle-même une dérivée, on la représentera par u'', $f''(x)$ ou $D^2 u$ et on l'appellera la *dérivée seconde* de u.

La dérivée de u'' sera la *dérivée troisième* de u, et se représentera par u''', $f'''(x)$ ou $D^3 u$; et ainsi de suite.

La différentielle $u' \, dx$ de la fonction u est une nouvelle fonction de x dont on pourra chercher la différentielle. Cette nouvelle différentielle dépend de la relation qu'on voudra établir entre la variable x et l'accroissement dx qu'on lui fait subir. Si l'on admet que cet accroissement ait une valeur constante, indépendante de x, cette différentielle sera évidemment égale à $u'' \, dx . dx = u'' \, dx^2$.

Or soient D le domaine dans l'intérieur duquel $f(x)$ est supposée définie; E l'ensemble des points intérieurs dont l'écart à la frontière est moindre qu'un nombre fixe δ; pour tous les points de E, on pourra, sans risquer que $x + dx$ sorte du champ, assigner à dx une même valeur constante de module $< \delta$; dx étant ainsi constant dans E, la différentielle de $u' dx$ y sera égale à $u'' dx . dx = u'' dx^2$. Cette expression se nomme la *différentielle seconde* de u, et se représente par $d^2 u$.

Si l'on fait décroître δ indéfiniment, E s'étendra de manière à englober successivement chacun des points intérieurs à D; ce qui permettra d'étendre la définition précédente de $d^2 u$ à tout l'intérieur de D.

De même, $d^2 u$ aura une différentielle $u''' dx^3$; ce sera la *différentielle troisième* de u, et on la représente par $d^3 u$. Continuant ainsi, on aura

$$
\begin{aligned}
du &= u' \, dx, \\
d^2 u &= u'' \, dx^2, \\
&\dots\dots\dots\dots, \\
d^n u &= u^{(n)} \, dx^n,
\end{aligned}
$$

d'où

$$u' = \frac{du}{dx}, \qquad u'' = \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad \ldots, \qquad u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Chacune des dérivées successives de u est ainsi un quotient de différentielles, ce qui donne une nouvelle manière, très souvent employée, de représenter ces quantités.

124. Si l'on donne à x un accroissement Δx, la fonction $f(x)$ prendra un accroissement

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

que nous appellerons la *différence première* de $f(x)$.

La différence de la différence première sera la *différence seconde,* et se représentera par $\Delta^2 f(x)$, et ainsi de suite.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$f(x + n\,\Delta x) = f^n.$$

On aura, d'après la définition précédente,

$$f^n = f^{n-1} + \Delta f^{n-1} \tag{1}$$

ou symboliquement

$$f^n = (1 + \Delta) f^{n-1} = (1 + \Delta)^2 f^{n-2} = \ldots = (1 + \Delta)^n f^0. \tag{2}$$

On aura réciproquement

$$\begin{aligned} \Delta f^0 &= f^1 - f^0, \\ \Delta^2 f^0 &= \Delta f^1 - \Delta f^0 = f^2 - f^1 - f^1 + f^0 = f^2 - 2f^1 + f^0, \end{aligned}$$

et généralement

$$\Delta^n f^0 = f^n + \mathrm{A} f^{n-1} + \mathrm{B} f^{n-2} + \ldots + \mathrm{K} f^0, \tag{3}$$

A, B, ..., K étant des coefficients numériques.

Pour les déterminer, prenons la différence des deux membres de l'équation (3). Il viendra

$$\Delta^{n+1} f^0 = \Delta f^n + \mathrm{A}\,\Delta f^{n-1} + \ldots + \mathrm{K}\,\Delta f^0.$$

Mais l'équation (1) peut être mise sous la forme symbolique

$$\Delta f^{n-1} = (f-1) f^{n-1}.$$

Donc

$$\Delta^{n+1} f^0 = (f-1)[f^n + A f^{n-1} + \ldots + K f^0] = (f-1)\,\Delta^n f^0.$$

On aura donc, en changeant n en $n-1$, ...,

$$(4)\quad \Delta^n f^0 = (f-1)\,\Delta^{n-1} f^0 = \ldots = (f-1)^{n-1}\,\Delta f^0 = (f-1)^n,$$

pourvu que, le développement effectué, on remplace le dernier terme $(-1)^n$ par $(-1)^n f^0$.

123. Les signes d'opération D et Δ peuvent être permutés entre eux; car on a évidemment

$$\begin{aligned} D\Delta f(x) &= D[f(x+\Delta x) - f(x)] \\ &= D\, f(x+\Delta x) - D\, f(x) = \Delta D\, f(x). \end{aligned}$$

En posant, pour plus de clarté,

$$\Delta^{n-1} f(x) = \varphi(x),$$

on aura donc

$$\varphi'(x) = \Delta^{n-1} f'(x).$$

Cela posé, appliquons à la fonction $\varphi(x)$ la formule

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x\, f'(x+\theta\,\Delta x),$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Il viendra

$$\Delta^n f(x) = \Delta x\, \varphi'(x+\theta\,\Delta x) = \Delta x . \Delta^{n-1} f'(x+\theta\,\Delta x).$$

On aura de même

$$\Delta^{n-1} f'(x) = \Delta x . \Delta^{n-2} f''(x+\theta_1\,\Delta x),$$

θ_1 étant compris entre 0 et 1, etc.; et, par suite,

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \Delta x^n f^n(x+\theta\,\Delta x + \theta_1\,\Delta x + \ldots) \\ &= \Delta x^n f^n(x + t\,\Delta x), \end{aligned}$$

t étant compris entre 0 et n.

Divisant par Δx^n et faisant tendre Δx vers zéro, on aura à la limite, si $f^n(x)$ est continue,

$$f^n(x) = \lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}. \tag{5}$$

126. Soit $u = f(x, y)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y; ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pourront admettre elles-mêmes des dérivées partielles.

Nous désignerons les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ ou par $D^2_{xx}f$, $D^2_{xy}f$ ou enfin par $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, celles de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ ou $D^2_{xy}f$, $D^2_{xx}f$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

En général, $\frac{\partial^{m+n+p+\dots} f}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial x^p\dots}$ représentera la fonction déduite de f en y effectuant successivement m dérivations par rapport à x, puis n dérivations par rapport à y, puis p dérivations par rapport à x, etc.

127. Posons

$$\begin{aligned}
\Delta\; f(x, y) &= f(x + \Delta x, y) - f(x, y),\\
\Delta_1 f(x, y) &= f(x, y + \Delta y) - f(x, y).
\end{aligned}$$

On aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_1 \Delta f(x, y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)\\
&\qquad - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)\\
&= \Delta \Delta_1 f(x, y).
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Posons, pour plus de clarté,

$$\Delta_1 f(x, y) = \varphi(x, y).$$

On aura

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_1 f(x, y) &= \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)\\
&= \varphi'_x(x + \theta\,\Delta x, y)\,\Delta x\\
&= [f'_x(x + \theta\,\Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \theta\,\Delta x, y)]\,\Delta x\\
&= f''_{xy}(x + \theta\,\Delta x, y + \theta_1\,\Delta y)\,\Delta y\,\Delta x.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\Delta\Delta_1 f(x,y)}{\Delta x\,\Delta y} = f''_{xy}(x+\theta\,\Delta x,\, y+\theta_1\,\Delta y).$$

Si la fonction f''_{xy} est continue au point x, y, on aura, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro,

$$(7) \qquad f''_{xy}(x,y) = \lim \frac{\Delta\Delta_1 f(x,y)}{\Delta x\,\Delta y}.$$

Si $f''_{yx}(x,y)$ est continue au point x, y, on trouvera de même

$$f''_{yx}(x,y) = \lim \frac{\Delta_1\Delta f(x,y)}{\Delta x\,\Delta y}$$

et, en vertu de l'égalité (6),

$$(8) \qquad f''_{yx}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Nous obtenons donc le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Si les dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ existent aux environs du point x, y; si, de plus, f''_{xy}, f''_{yx} sont continues en ce point, ces deux dérivées partielles seront égales.*

On voit par là que deux dérivations successives, opérées par rapport à deux variables différentes x, y, peuvent (sous les conditions précédentes) être interverties sans changer le résultat final. On en déduit

$$(9) \qquad \frac{\partial^{m+n+p+\ldots} f}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial x^p\ldots} = \frac{\partial^{m+n+p+\ldots} f}{\partial x^{m+p+\ldots}\ldots\partial y^{n+\ldots}},$$

en opérant d'abord toutes les dérivations relatives à x, puis celles relatives à y.

128. On voit aisément qu'on aura en général

$$\Delta^m \Delta_1^n f(x,y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} f(x+t\,\Delta x,\, y+t_1\,\Delta y)\,\Delta x^m\,\Delta y^n,$$

t étant compris entre o et m, t_1 entre o et n.

Si donc la dérivée partielle d'ordre $m+n$, qui figure au

second membre, est continue au point x, y, on aura, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro,

$$\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \lim \frac{\Delta^m \Delta_1^n f(x, y)}{\Delta x^m \Delta y^n}. \tag{10}$$

129. Considérons maintenant la différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

de la fonction $f(x, y)$. La différentielle de cette différentielle, prise en supposant dx et dy constants, se nomme la *différentielle seconde* de f, et se désigne par $d^2 f$. La différentielle de $d^2 f$ sera la différentielle troisième $d^3 f$, et ainsi de suite.

On a, d'après cette définition,

$$\begin{aligned} d^2 f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

et, plus généralement,

$$\begin{aligned} d^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} dx^m &+ m \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} dx^{m-1} dy + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-n} dy^n} dx^{m-n} dy^n \\ &+ \ldots + \frac{\partial^m f}{\partial y^m} dy^m \end{aligned}$$

ou, sous forme symbolique,

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f. \tag{11}$$

Cette formule étant vérifiée pour df et $d^2 f$, il suffira d'établir que, si elle est vraie pour un nombre m, elle sera vraie pour $m + 1$.

Pour cela, différentions cette formule. Nous obtiendrons

évidemment un résultat de la forme

$$d^{m+1}f = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} dx^{m+1} + A_1 \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m \partial y} dx^m dy + \ldots$$
$$+ A_n \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n} \partial y^n} dx^{m+1-n} dy^n + \ldots + \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}} dy^{m+1}.$$

Il reste à vérifier l'expression des coefficients numériques A.

Or, le terme général

$$A_n \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n} \partial y^n} dx^{m+1-n} dy^n$$

provient de la différentiation par rapport à x du terme en $dx^{m-n} dy^n$ de l'expression de $d^m z$ et de la différentiation par rapport à y du terme précédent. Ces termes ayant respectivement pour coefficients

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \quad \text{et} \quad \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)},$$

A_n sera égal à la somme de ces deux quantités, soit à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\left(1 + \frac{m-n+1}{n}\right)$$
$$= \frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n},$$

ce qui confirme la formule.

130. Soient u et v deux fonctions d'une ou de plusieurs variables. On aura généralement

$$(12)\quad \begin{cases} d^m(uv) = v\, d^m u + m\, d^{m-1} u\, dv + \ldots \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} d^{m-n} u\, d^n v + \ldots + u\, d^m v. \end{cases}$$

En effet, Δu, Δv étant les accroissements de u et de v, on aura

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

Négligeant le terme du second ordre $\Delta u\,\Delta v$, et remplaçant

Δu, Δv par leurs valeurs principales du et dv, on aura, pour valeur principale de Δuv,

$$duv = v\,du + u\,dv,$$

ce qui confirme la formule pour $m = 1$.

D'ailleurs, en la supposant démontrée pour le nombre m, on verra, comme précédemment, qu'elle est vraie pour $m+1$.

131. Plus généralement, soit $V = f(u, v)$ une fonction quelconque de u et de v, u et v étant encore des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y. Proposons-nous de déterminer les différentielles successives de V.

On a pour la différentielle première, ainsi que nous l'avons vu,

$$dV = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv.$$

Pour calculer la différentielle seconde d^2V, il faudra différentier cette expression. Or $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ sont des fonctions de u, v, qui ont respectivement pour différentielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,dv, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv.$$

D'autre part, du, dv dépendent de x, y, ... et ont, par définition, pour différentielles d^2u, d^2v. Appliquant la règle trouvée pour différentier un produit, il viendra donc

$$\begin{aligned} d^2V &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,dv\right)du + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv\right)dv \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}\,d^2v \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}\,d^2v. \end{aligned}$$

Une nouvelle différentiation donnerait d^3V, et ainsi de suite.

On voit, par les formules qui précèdent, que dV a la même forme que si u, v étaient des variables indépendantes; mais il n'en est pas de même des différentielles suivantes : d^2V, par exemple, contient des termes en d^2u et d^2v qui n'existeraient pas dans cette hypothèse.

XI. — Changements de variables.

132. On a souvent l'occasion de substituer aux variables qui figurent dans une formule de nouvelles variables ayant avec les premières une liaison connue. Nous sommes actuellement en mesure d'indiquer les règles à suivre pour effectuer cette opération lorsque les fonctions à transformer contiennent des dérivées. Nous allons les exposer en commençant par les cas les plus simples.

Problème I. — *Soit $y = F(x)$ une fonction de x ayant pour dérivées successives $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... Supposons que x, au lieu d'être une variable indépendante, soit lui-même fonction d'une nouvelle variable t, et soient x', x'', ..., y', y'', ... les dérivées successives de x et de y par rapport à t.*

On demande de trouver les relations qui existent entre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., x', x'', ..., y', y'', ...

y étant, par rapport à t, une fonction de fonction, on aura, par la règle connue,

$$y' = \frac{dy}{dx} x'.$$

Dérivant de nouveau par rapport à t, en remarquant que $\frac{dy}{dx}$ est une fonction de x, qui est lui-même fonction de t, on aura

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x''.$$

Dérivant encore, on trouvera

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}x'^3 + 3\frac{d^2y}{dx^2}x'x'' + \frac{dy}{dx}x''',$$

Résolvant ces équations par rapport à $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., on trouvera réciproquement

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

On remarquera qu'en appelant d_1x, d_1^2x, ..., d_1y, d_1^2y les différentielles successives de x et de y par rapport à la nouvelle variable t, on aura

$$x' = \frac{d_1x}{dt}, \qquad y' = \frac{d_1y}{dt}, \qquad x'' = \frac{d_1^2x}{dt^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{d_1y}{d_1x}.$$

Donc la dérivée de y par rapport à x reste égale au rapport des différentielles de x et de y, quelle que soit la variable indépendante.

L'expression des dérivées suivantes est au contraire changée. On aura, par exemple,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d_1x\,d_1^2y - d_1y\,d_1^2x}{d_1x^3}.$$

133. Problème II. — *Soit, comme précédemment, $y = F(x)$. Posons*

$$(2) \qquad x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u).$$

Nous aurons trois équations entre x, y, t, u. On peut donc considérer x, y, u comme des fonctions de t. Cela posé, *on demande d'exprimer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... en fonction de t, u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ...*

Prenons les dérivées successives des équations (2) par rapport à la nouvelle variable indépendante t. Il viendra

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

puis

$$x'' = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2 u}{dt^2},$$

$$y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{d^2 u}{dt^2},$$

On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les expressions (1).

134. Applications. — 1° *Soient* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. *On demande l'expression de la quantité*

$$R = \frac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}$$

(nous la rencontrerons dans la théorie des courbes, sous le nom de *rayon de courbure*) *en fonction de* ρ, θ, $\dfrac{d\rho}{d\theta}$, $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

On aura

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta,$$

$$y' = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta,$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta$$

et

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(1+\frac{y'^2}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'^3},$$

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},$$

$$x'^2+y'^2=\frac{d\rho^2}{d\theta^2}+\rho^2$$

$$\begin{aligned}x'y''-y'x''&=\left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta\right)\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta\right)\\&-\left(\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta\right)\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta-\rho\cos\theta\right)\\&=2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho^2,\end{aligned}$$

$$R=\frac{\left(\frac{d\rho^2}{d\theta^2}+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho^2}.$$

135. 2° *Les deux variables x et y étant liées par une équation, on demande d'exprimer les dérivées x', x'', ... de x par rapport à y en fonction des dérivées y', y'', ... de y par rapport à x.*

On a, par le théorème sur la dérivée des fonctions inverses,

$$x'=\frac{1}{y'}.$$

Prenons la dérivée de cette équation par rapport à la nouvelle variable indépendante y. En remarquant que y', y'', ... sont des fonctions de x, qui lui-même est fonction de y, le théorème sur la dérivée des fonctions de fonction donnera

$$x''=-\frac{y''}{y'^2}x'=-\frac{y''}{y'^3},$$

$$x'''=\left(-\frac{y'''}{y'^3}+\frac{3y''^2}{y'^4}\right)x'=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

136. Les fonctions de plusieurs variables donnent lieu à deux questions analogues, que nous allons traiter.

Problème III. — *Soit z une fonction de deux variables x, y. On pose $x=f(t,u)$, $y=\varphi(t,u)$, t et u étant deux nouvelles variables. On demande d'exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$ en fonction de t, u, $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dots$.*

z étant fonction de x, y, qui sont eux-mêmes fonctions de t, u, sera une fonction composée de ces deux nouvelles variables. Prenons ses dérivées partielles successives; il viendra

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

puis, en remarquant que $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions de x, y, eux-mêmes fonctions de t et de u,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial u},\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.\end{aligned}\right.$$

On calculerait de même les dérivées troisièmes, etc.

Cela posé, les équations (3), linéaires en $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, permettent d'exprimer ces quantités en fonctions de $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et des dérivées partielles de x et y, lesquelles sont des fonctions connues de t, u. Portant ensuite les valeurs trouvées pour $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ dans les équations (4), (5), (6), on pourra les résoudre par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; de même pour les dérivées des ordres supérieurs.

Cette méthode est évidemment applicable à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

137. *Remarque.* — On ne doit pas perdre de vue que la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ d'une fonction de deux variables x, y est, par définition, la dérivée de z considéré comme fonction de x, *y restant constant.* Si nous remplaçons y par $\varphi(x, u)$, de telle sorte que les nouvelles variables indépendantes soient x et u, la nouvelle dérivée partielle par rapport à x sera la dérivée de z par rapport à x, *u restant constant.* De ce changement de définition résulte naturellement un changement dans la valeur de cette dérivée partielle.

Soit, par exemple, $z = F(x, y)$. On aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Mais, après le changement de variable, on aura

$$z = F[x, \varphi(x, u)], \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

138. *Exemples.* — 1° Soient x, y, z trois variables indépendantes. Posons

$$\begin{aligned} x &= at + bu + cv, \\ y &= a't + b'u + c'v, \\ z &= a''t + b''u + c''v, \end{aligned}$$

$a, b, c, \ldots$ étant des constantes choisies de telle sorte que la substitution soit *orthogonale*, c'est-à-dire qu'on ait

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2.$$

Cette condition fournira le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned}
a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\
b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\
c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1,\\
ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\
bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\
ca + c'a' + c''a'' &= 0,
\end{aligned}$$

ou le suivant, qui lui est équivalent, comme on sait,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\\
a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1,\\
a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1,\\
aa' + bb' + cc' &= 0,\\
a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0,\\
a''a + b''b + c''c &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant V une fonction quelconque de x, y, z. Considérons les deux expressions

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

qui se présentent dans un grand nombre de problèmes, et que M. Lamé a nommées les *paramètres différentiels* du premier et du second ordre de la fonction V. Proposons-nous de les exprimer au moyen des dérivées partielles de V par

rapport aux nouvelles variables t, u, v. On aura

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\frac{\partial V}{\partial x} + a'\frac{\partial V}{\partial y} + a''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = b\frac{\partial V}{\partial x} + b'\frac{\partial V}{\partial y} + b''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = c\frac{\partial V}{\partial x} + c'\frac{\partial V}{\partial y} + c''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = {}& a\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)\\ &+ a'\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)\\ &+ a''\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\\ ={}& a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ &+ 2aa'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + 2a'a''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + 2a''a\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = {}& b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ &+ 2bb'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + 2b'b''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + 2b''b\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = {}& c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ &+ 2cc'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + 2c'c'''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + 2c''c\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}.\end{aligned}$$

Ajoutons les carrés des trois premières équations. Il viendra, en tenant compte des équations (7),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Les trois suivantes, ajoutées ensemble, donneront de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

La forme des paramètres différentiels n'est donc pas altérée par une substitution orthogonale effectuée sur les variables, et c'est à cette circonstance que ces expressions doivent leur importance en Analyse.

139. 2° Posons

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\theta,$$

et proposons-nous d'exprimer les paramètres différentiels de V en fonction des nouvelles variables ρ, θ, ψ.

Le changement de variables qui précède équivaut évidemment aux deux suivants, opérés successivement

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi, \qquad z = z$$

et

$$r = \rho\sin\theta, \qquad \psi = \psi, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

Effectuons le premier changement de variables. Il viendra

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\psi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = -\frac{\partial V}{\partial x} r\sin\psi + \frac{\partial V}{\partial y} r\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\psi + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cos\psi\sin\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\sin^2\psi,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} r^2\sin^2\psi - 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} r^2\sin\psi\cos\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} r^2\cos^2\psi \\ & - \frac{\partial V}{\partial x} r\cos\psi - \frac{\partial V}{\partial y} r\sin\psi.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

D'ailleurs, $\frac{\partial V}{\partial z}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'ont évidemment pas changé. Les

paramètres différentiels deviendront donc respectivement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Le second changement de variables qui nous reste à effectuer, à savoir

$$z = \rho\cos\theta, \qquad r = \rho\sin\theta, \qquad \psi = \psi,$$

n'altérera évidemment pas $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$ et transformera respectivement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Enfin on aura les relations

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial z}\rho\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\rho\cos\theta,$$

d'où l'on déduit, en éliminant $\frac{\partial V}{\partial z}$,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions précédentes, on aura, pour le premier paramètre différentiel,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2,$$

et pour le second

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

140. Problème IV. — *Soit z une fonction de x, y. Posons*

$$(8)\quad x = f(t, u, v), \qquad y = \varphi(t, u, v), \qquad z = \psi(t, u, v).$$

On demande d'exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ *en fonction de t, u, v et des dérivées partielles* $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \ldots$.

z étant une fonction de x, y, les quantités x, y, v seront des fonctions de t et de u, en vertu des trois équations (8). Prenant les dérivées partielles de ces équations par rapport à ces nouvelles variables, il viendra

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations (3) à (6), lesquelles détermineront $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$.

XII. — Changements de variables dans les intégrales définies.

141. Soient x et t deux variables, liées par la relation

$$x = \varphi(t).$$

Nous admettrons que pour tous les points t d'un domaine borné E : 1° la fonction φ conserve une dérivée continue et

différente de zéro; 2° à deux valeurs distinctes de t correspondent deux valeurs de x toujours distinctes.

Cette seconde condition serait, d'ailleurs, une conséquence de la première si E était d'un seul tenant; car il serait formé des nombres compris entre deux nombres fixes t_0, T, et si x prenait la même valeur ξ pour deux valeurs différentes t_1 et t_2 de la variable t, $x - \xi$ s'annulant pour ces valeurs, sa dérivée $\varphi'(t)$ s'annulerait pour une valeur intermédiaire, ce qui est contraire à notre première hypothèse.

A l'ensemble E des points t correspond un ensemble E' de points x, et si t décrit un ensemble parfait E_1, de longueur mesurable et intérieur à E, x décrira un ensemble parfait E'_1, intérieur à E'.

Soient

t un point de E_1;
$t + dt$ un point infiniment voisin;
x et $x + \Delta x$ les points correspondants.

On aura

$$\Delta x = (\varphi'(t) + R)\,dt,$$

R tendant uniformément vers zéro avec dt dans le domaine E_1. Si donc dt reste inférieur à un nombre fixe convenablement choisi, R sera constamment moindre qu'un nombre arbitraire ε. Le rapport $\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|}$ restera donc compris entre $M + \varepsilon$ et $m - \varepsilon$, M et m désignant le maximum et le minimum de $|\varphi'(t)|$.

On en conclut que E'_1 a une longueur mesurable. Décomposons, en effet, la droite lieu des points t en éléments infiniment petits dt_1, dt_2, ... La somme des éléments qui contiennent des points de la frontière de E_1 sera infiniment petite. Soit dt_k l'un de ces éléments; les points de E_1 qu'il contient étant à des distances au plus égales à dt_k de l'un d'entre eux t_k, leurs correspondants seront à des distances du point x_k qui correspond à t_k moindres que $(M + \varepsilon)\,dt_k$;

ils seront donc tous contenus dans un segment δ_k de longueur moindre que $2(M+\varepsilon)\,dt_k$.

La réunion des segments δ_k forme un ensemble contenant la frontière de E'_1, et dont la longueur, étant au plus égale à

$$\sum \delta_k < 2(M+\varepsilon)\sum dt_k,$$

est infiniment petite. Donc E'_1 a une longueur mesurable.

142. Soit maintenant $f(x)$ une fonction de la variable x, bornée dans E'_1; on aura

$$f(x) = f[\varphi(t)] = F(t),$$

F étant une fonction de t, bornée dans E_1.

Nous allons montrer que l'intégrale, soit par excès, soit par défaut, de la fonction $f(x)$, prise dans l'intérieur de E'_1, est égale à l'intégrale correspondante de la fonction $F(t)\,|\varphi'(t)|$ prise dans l'intérieur de E_1.

Considérons, par exemple, les intégrales par excès. Décomposons E_1 en éléments mesurables infiniment petits dt_1, dt_2, ... et E'_1 en éléments correspondants Δx_1, Δx_2, ... également mesurables. Soient M_k le maximum de $F(t)\,|\varphi'(t)|$ dans l'élément dt_k; M'_k celui de $f(x)$ dans l'élément Δx_k. Il faut prouver que les deux sommes

$$\sum M_k\,|dt_k|, \quad \sum M'_k\,|\Delta x_k|$$

tendent vers la même limite.

Soit t_k la valeur de t à l'origine du segment dt_k; on aura

$$|\Delta x_k| = |\varphi'(t_k) + R_k|\,|dt_k|,$$

$|R_k|$ étant $< \varepsilon$ si les éléments sont assez petits. D'autre part, $f(x)$ et $F(t)$ n'étant que deux expressions différentes de la même quantité, le maximum de $F(t)$ dans l'élément $|dt_k|$ sera M'_k, et celui de $F(t)\,|\varphi'(t)|$ sera compris entre $M'_k n_k$ et $M'_k N_k$, n_k et N_k désignant le minimum et le maximum

de $|\varphi'(t)|$ dans cet élément. Comme on a

$$n_k \overset{=}{<} |\varphi'(t_k)| \overset{=}{<} N_k,$$

$M'_k |\varphi'(t_k)|$ sera compris entre les mêmes nombres. On aura donc

$$M_k = M'_k[\varphi'(t_k) + \varepsilon_k],$$

$|\varepsilon_k|$ étant au plus égal à $N_k - n_k$.

Or la fonction $|\varphi'(t)|$, étant continue dans E_1, l'est uniformément; si donc les éléments sont assez petits, on aura

$$N_k - n_k < \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad |\varepsilon_k| < \varepsilon.$$

Cela posé, la différence

$$\sum M'_k |\Delta x_k| - \sum M_k |dt_k|$$

sera égale à

$$\sum (R_k - M'_k \varepsilon_k) |dt_k|.$$

Désignons par μ' le maximum du module de $f(x)$ dans E_1; le module de la somme ci-dessus sera moindre que

$$(\varepsilon + \mu'\varepsilon) \sum |dt_k| = \varepsilon(1 + \mu')E_1$$

et tendra vers zéro avec ε.

La démonstration serait toute semblable pour les intégrales par défaut.

Si $f(x)$ est intégrable dans le domaine E'_1, ses intégrales par excès et par défaut coïncideront; il en sera de même des intégrales de $F(t)\varphi'(t)$ dans E_1; cette fonction sera donc intégrable dans ce domaine.

143. *Remarque.* — Si nous supposons la fonction $f(x)$ bornée dans E', nous pourrons faire croître le domaine E_1 de telle sorte que son aire tende vers l'aire intérieure de E; celle de E'_1 tendra vers l'aire intérieure de E', et l'égalité

$$\mathbf{S}_{E'_1} f(x)\,dx = \mathbf{S}_{E_1} F(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

démontrée ci-dessus, deviendra à la limite

$$\mathbf{S}_{E'} f(x)\,dx = \mathbf{S}_E F(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

sans qu'il soit nécessaire de supposer que E et E′ soient mesurables.

144. Supposons en particulier que E et, par suite, E′ soient d'un seul tenant; E sera formé par les valeurs de t, pour lesquelles on a

$$t_0 \overline{\overline{<}}\, t\, \overline{\overline{<}}\, T,$$

t_0 et T étant deux nombres fixes; E′ par les valeurs de x pour lesquelles

$$x_0 \overline{\overline{<}}\, x\, \overline{\overline{<}}\, X,$$

x_0 et X étant les valeurs correspondantes à t_0 et T.

L'intégrale de $f(x)$, dans le domaine E′, sera représentée par

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

si $X > x_0$; par cette même quantité changée de signe, dans le cas contraire.

De même, l'intégrale de $F(t)\,\varphi'(t)$ dans E sera représentée par

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,|\varphi'(t)|\,dt,$$

si $T > t_0$; par cette expression changée de signe, si $T < t_0$.

D'ailleurs $|\varphi'(t)|$ est égal à $\varphi'(t)$ ou à $-\varphi'(t)$, suivant que cette dérivée est positive ou négative. La dernière intégrale sera donc égale à

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

ou égale et contraire, suivant que $(T - t_0)\,\varphi'(t)$ est positive ou négative. Mais cette quantité a le même signe que $X - x_0$, car lorsque t croît, x croît aussi, si $\varphi'(t) > 0$, et décroît au contraire, si $\varphi'(t) < 0$.

On a donc, dans tous les cas,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

On peut donc formuler la règle suivante pour le changement de variable dans les intégrales simples.

Remplacer dans la différentielle à intégrer x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)\,dt$; prendre pour limites de l'intégrale transformée les valeurs de t qui correspondent aux anciennes limites.

145. Passons au cas des intégrales doubles.

Soient x, y et u, v deux couples de variables, liées par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v).$$

Nous admettrons que, pour tous les points (u, v) d'un domaine borné E : 1° les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues; 2° que leur jacobien J reste différent de zéro; 3° qu'à deux points (u, v) différents correspondent deux points (x, y) toujours différents.

A l'ensemble E des points (u, v) correspondra pour les points (x, y) un ensemble E', et, si (u, v) décrit un ensemble parfait et mesurable E_1, intérieur à E, (x, y) décrira un ensemble parfait E'_1 intérieur à E'.

146. Soient

(u, v) un point de E_1;
$(u + du, v + dv) = (U, V)$ un point infiniment voisin;
(x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ leurs correspondants.

On aura

$$\Delta x = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv + R\,du + R_1\,dv = dx + R\,du + R_1\,dv,$$

$$\Delta y = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\,dv + R_2\,du + R_3\,dv = dy + R_2\,du + R_3\,dv,$$

R, R_1, R_2, R_3 tendant uniformément vers zéro avec du, dv dans tout le domaine E_1. Si donc $|du|$ et $|dv|$ ne surpassent pas un nombre ρ suffisamment petit,

$$|R\,du + R_1\,dv| \quad \text{et} \quad |R_2\,du + R_3\,dv|$$

resteront moindres que

$$\varepsilon[\,|du| + |dv|\,],$$

ε pouvant être choisi aussi petit qu'on voudra.

La distance $d\sigma$ des deux points (u, v), $(u + du,\ v + dv)$ est donnée par la formule

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$

et la distance Δs de leurs correspondants par celle-ci

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

En désignant par ds sa valeur principale, on aura

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\,dv\right)^2 \\ &= M\,du^2 + 2N\,du\,dv + P\,dv^2, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)^2, \\ P &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right)^2, \\ N &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}. \end{aligned}$$

Le rapport $\dfrac{ds^2}{d\sigma^2}$ ne dépend que de u, v et du rapport $\dfrac{dv}{du}$; sa valeur ne sera donc pas altérée si l'on y remplace du, dv par des quantités proportionnelles α, β telles que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; il se réduira alors à

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\beta\right)^2.$$

C'est une fonction de u, v, α, β continue et toujours po-

sitive; car elle ne pourrait s'annuler que si l'on avait à la fois

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\beta = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\alpha + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\beta = 0,$$

d'où $J = 0$, ou $\alpha = \beta = 0$. Or, par hypothèse, dans tout le domaine E, J est $\gtrless 0$ et, d'autre part, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Donc cette fonction admet un maximum M^2 et un minimum m^2 tous deux positifs. Donc enfin le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ est toujours compris entre les deux nombres positifs fixes M et m.

D'autre part, $|\Delta s - ds|$ est au plus égal à la distance des points $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ et $(x + dx, y + dy)$, laquelle ne peut surpasser elle-même la somme de ses projections

$$\begin{aligned} |\Delta x - dx| + |\Delta y - dy| &= |R\,du + R_1\,dv| + |R_2\,du + R_3\,dv| \\ &< 2\varepsilon[\,|du| + |dv|\,] < 4\varepsilon d\sigma. \end{aligned}$$

Le rapport $\frac{\Delta s}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} + \frac{\Delta s - ds}{d\sigma}$ sera donc compris lui aussi entre deux nombres fixes $M + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$.

147. Il résulte de là que, si (u, v) décrit une ligne rectifiable de longueur L, la ligne correspondante décrite par (x, y) sera également rectifiable et aura une longueur comprise entre ML et mL. Car si l'on inscrit à ces deux lignes des polygones correspondants quelconques à côtés infiniment petits, le rapport des côtés homologues et, par suite, celui des périmètres, seront toujours compris entre $M + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$. D'ailleurs, si les côtés deviennent suffisamment petits, on pourra faire décroître ε autant qu'on voudra.

148. Cela posé, admettons que, le point (u, v) restant fixe, on fasse parcourir à du et à dv toute la suite des valeurs de 0 à ρ, ρ étant un infiniment petit.

Le point $(u + du, v + dv) = (U, V)$ décrira un carré Q de côté ρ, et son correspondant $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ se confondra sensiblement avec le point (ξ, η) qui a pour

coordonnées

$$\xi = x + dx = x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

$$\eta = y + dy = y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv.$$

Ce dernier point (ξ, η) décrit un parallélogramme; car si, dv étant nul, on fait varier du de o à ρ, (ξ, η) décrira un segment de droite ayant pour projections $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\rho$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\rho$; et si, d'autre part, assignant à du une valeur fixe, on fait varier dv de o à ρ, (ξ, η) décrit un autre segment de droite ayant pour projections $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\rho$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\rho$. Ces projections étant indépendantes de du, la direction et la longueur de ce nouveau segment n'en dépendront pas non plus.

L'aire de ce parallélogramme P sera, d'après une formule connue, égale à

$$\operatorname{mod} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\rho & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\rho \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}\rho & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\rho \end{vmatrix} = |\mathrm{J}|\rho^2.$$

D'autre part, ses côtés seront au plus égaux à $M\rho$ et son périmètre p à $4M\rho$.

149. Quant au point (X, Y), sa distance au point (ξ, η) est, comme nous l'avons vu, moindre que la quantité

$$2\varepsilon[|du| + |dv|]$$

et *a fortiori* moindre que $4\varepsilon\rho$.

Si donc on construit deux nouveaux parallélogrammes P' et P'', l'un extérieur, l'autre intérieur à P, et dont les côtés soient distants de ceux de P de la quantité $4\varepsilon\rho$, la région R du plan décrite par le point (X, Y) contiendra P'', mais sera contenue dans P'. Or la différence des aires de P' et de P'' est évidemment égale à $2.4\varepsilon\rho.p$ et, par suite, au plus égale à $32M\varepsilon\rho^2$. Mais elles comprennent entre elles l'aire P_1 égale

à $|J|\rho^2$. Elles sont donc comprises toutes deux entre $[|J|+32M\varepsilon]\rho^2$ et $[|J|-32M\varepsilon]\rho^2$. Il en sera *a fortiori* de même pour les aires intérieure et extérieure de R. Celles-ci coïncident d'ailleurs, comme nous allons le voir.

150. En effet, soit plus généralement E_2 un ensemble mesurable quelconque contenu dans E_1 (qui pourrait être d'ailleurs identique à E_1); l'ensemble E'_2 décrit par (x, y) lorsque (u, v) décrit E_2 est également mesurable.

En effet, décomposons le plan des u, v en carrés Q de côté ρ. La somme $\sum Q_i$ de ceux de ces carrés qui rencontrent la frontière F_2 de E_2 tend vers zéro par hypothèse. A chacun d'eux Q_i correspond un parallélogramme P'_i d'aire moindre que la quantité

$$[|J_i|+32M\varepsilon]\rho^2=[|J_i|+32M\varepsilon]Q_i,$$

J_i désignant la valeur de J en un sommet du carré Q_i.

L'ensemble de ces parallélogrammes formera un domaine mesurable et parfait, enveloppant la frontière F'_2 de E'_2 et dont l'aire sera au plus égale à la somme des aires des parallélogrammes P'_i (qui, en général, empiètent en partie les uns sur les autres). Mais, en désignant par μ le maximum de $|J|$ dans E_2, on aura évidemment

$$\sum P'_i \overline{\gtrless} (\mu+32M\varepsilon)\sum Q_i,$$

quantité qui tend vers zéro avec $\sum Q_i$. Donc E'_2 est bien mesurable.

On trouve d'ailleurs aisément l'expression de l'aire de E'_1. En effet, à chaque carré Q_k intérieur à E_1 correspond dans E'_1 un élément R_k, mesurable comme on vient de le voir, et dont l'aire sera de la forme

$$R_k=[|J_k|+\eta_k]Q_k,$$

η_h étant un infiniment petit, de module $< 32M\varepsilon$.

L'aire de E'_1 sera évidemment égale à

$$\lim \sum R_k = \lim \sum [\,|J_k| + \eta_k]\, Q_k;$$

mais on a

$$\left| \sum \eta_k Q_k \right| < 32 M \varepsilon \sum Q_k < 32 M \varepsilon E_1,$$

expression dont la limite est zéro. On aura donc pour l'aire cherchée

$$E'_1 = \lim \sum |J_k|\, Q_k = \mathbf{S}_{E_1} |J|\, de.$$

151. Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de x, y, bornée dans E'_1. Posons $f(\varphi, \varphi_1) = F(u, v)$. L'intégrale, soit par défaut, soit par excès, de $f(x, y)$ dans le domaine E'_1 sera égale à l'intégrale correspondante de $F(u, v)\,|J|$ dans le domaine E_1.

Décomposons, en effet, le plan des u, v en carrés de côté ρ. Soient Q_k l'un d'eux qui soit intérieur à E_1; R_k l'élément correspondant de E'_1, et considérons, par exemple, les intégrales par excès. Désignons par M_k le maximum de $F(u, v)\,|J|$ dans Q_k; par M'_k celui de $f(x, y)$ dans R_k. Il nous faut montrer que les deux sommes

$$\sum M_k Q_k, \qquad \sum M'_k R_k = \sum M'_k [\,|J_k| + \eta_k]\, Q_k$$

tendent vers la même limite.

Or le maximum de $F(u, v) = f(x, y)$ dans Q_k est évidemment M'_k; et celui de $F(u, v)\,|J|$ est égal à $M'_k \nu_k$, ν_k désignant une quantité intermédiaire entre le maximum N_k et le minimum n_k de $|J|$ dans Q_k. D'ailleurs, J étant continu dans E_1, la différence $N_k - n_k$, et *a fortiori* la différence $|J_k| - \nu_k$, tendra vers zéro avec ρ, et cela uniformément.

Cela posé, on aura

$$\sum M'_k R_k - \sum M_k Q_k = \sum [\,|J_k| + \eta_k]\, M'_k Q_k - \sum \nu_k M'_k Q_k$$
$$= \sum [\,|J_k| - \nu_k + \eta_k]\, M'_k Q_k.$$

Or, si ρ tend vers zéro, $|J_k| - \nu_k$ et η_k tendent uniformément vers zéro, M'_k reste au-dessous d'une limite fixe M'; enfin, $\sum Q_k$ a pour limite l'aire de E_1 qui est finie. Donc la différence ci-dessus tend bien vers zéro.

152. Si la fonction $f(x, y)$ reste bornée dans tout le domaine E', l'égalité

$$\mathbf{S}_{E'_1} f(x, y)\, de = \mathbf{S}_{E_1} F(u, v)\,|J|\, de,$$

qui vient d'être établie, donnera à la limite, en faisant tendre E_1, E'_1 vers E et E', la relation

$$\mathbf{S}_{E'} f(x, y)\, de = \mathbf{S}_{E} F(u, v)\,|J|\, de,$$

sans qu'il soit nécessaire de supposer que E et E' soient mesurables.

153. Des considérations toutes semblables s'appliquent aux intégrales triples. L'analogie est telle, qu'il nous suffira d'indiquer la marche du raisonnement.

Soient x, y, z et t, u, v deux séries de trois variables liées par les relations

$$x = \varphi_1(t, u, v), \qquad y = \varphi_2(t, u, v), \qquad z = \varphi_3(t, u, v).$$

Lorsque (t, u, v) décrira dans l'espace un domaine E, (x, y, z) décrira un domaine correspondant E'.

Supposons : 1° que dans tout le domaine E, les dérivées partielles de φ_1, φ_2, φ_3 soient continues, et leur jacobien J différent de zéro; 2° qu'à deux points (t, u, v) différents correspondent toujours deux points (x, y, z) différents.

Si (t, u, v) décrit un domaine parfait et mesurable E_1 intérieur à E, (x, y, z) décrira un ensemble correspondant E'_1, intérieur à E'.

Soient (t, u, v), et $(t + dt, u + du, v + dv) = (T, U, V)$ deux points de E_1 infiniment voisins : leur distance $d\sigma$ sera

donnée par la formule

$$ds^2 = dt^2 + du^2 + dv^2,$$

et celle Δs de leurs correspondants par la formule

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

expression dont la valeur principale est

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv\right)^2 + \ldots \\ &= \mathrm{M}_1\,dt^2 + \mathrm{M}_2\,du^2 + \mathrm{M}_3\,dv^2 + 2\,\mathrm{N}_1\,du\,dv \\ &\quad + 2\,\mathrm{N}_2\,dv\,dt + 2\,\mathrm{N}_3\,dt\,du, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{M}_1 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right)^2, \qquad \mathrm{M}_2 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{M}_3 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right)^2,$$

$$\mathrm{N}_1 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}, \qquad \mathrm{N}_2 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}, \qquad \mathrm{N}_3 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}.$$

Si $|dt|$, $|du|$, $|dv|$ ne surpassent pas un nombre donné ρ, la distance des deux points

$$(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$$

et

$$(x + dx,\ y + dy,\ z + dz) = (\xi, \eta, \zeta)$$

sera moindre que $3\varepsilon[\,|dt| + |du| + |dv|\,]$, ε ne dépendant que de ρ et tendant vers zéro avec lui.

On en déduit que $\dfrac{\Delta s}{d\sigma}$ est compris entre deux nombres positifs fixes M et m. Si donc (T, U, V) décrit une ligne rectifiable, il en sera de même de son correspondant (X, Y, Z).

Si (T, U, V) décrit un cube Q de côté ρ, (ξ, η, ζ) décrira alors un parallélépipède P, de volume $|\mathrm{J}|\,\rho^3$ et dont les côtés seront au plus égaux à $\mathrm{M}\rho$ et l'aire A au plus égale à $6\mathrm{M}^2\rho^2$.

Le point (X, Y, Z) est d'ailleurs à une distance de (ξ, η, ζ) moindre que $3\varepsilon[\,|dt| + |du| + |dv|\,]$ et, *a fortiori*, moindre que $9\varepsilon\rho$. Si donc on construit deux parallélépipèdes P′ et P″, l'un intérieur, l'autre extérieur à P, ayant leurs faces parallèles à celles de P et à la distance $9\varepsilon\rho$ de ces dernières, le domaine R décrit par (X, Y, Z) contiendra P″, mais sera con-

tenu dans P'. Or la différence des volumes de P' et de P'' est évidemment

$$2.9\varepsilon\rho A \leqq 108 M^2 \varepsilon\rho^2.$$

On en conclut, comme aux n^{os} **150** à **152** :

1° Que le domaine décrit par (x, y, z) lorsque (t, u, v) décrit dans E_1 un domaine mesurable est mesurable;

2° Que si $f(x, y, z) = F(t, u, v)$ est une fonction bornée dans E'_1, on aura

$$\mathbf{S}_{E'_1} f(x, y, z)\,de = \mathbf{S}_{E_1} F(t, u, v)\,|J|\,de;$$

3° Que si $f(x, y, z)$ est bornée dans tout le domaine E' mesurable ou non, on aura encore

$$\mathbf{S}_{E'} f(x, y, z)\,de = \mathbf{S}_{E} F(t, u, v)\,|J|\,de.$$

154. On traiterait par des procédés tout semblables le cas des intégrales multiples d'ordre quelconque; mais, l'intuition géométrique faisant ici défaut, il faudrait traduire en langage analytique les démonstrations relatives à l'aire du parallélogramme ou au volume du parallélépipède et en faire l'extension au cas de plus de trois variables. Nous ne nous y arrêterons pas.

155. Soient (u, v) un point d'un plan et (x, y, z) un point de l'espace, lié au précédent par les équations

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Nous admettrons que pour les valeurs de (u, v) comprises dans un domaine E : 1° les dérivées partielles de φ_1, φ_2, φ_3 restent continues; 2° les trois jacobiens

$$A = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v},$$

$$B = \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v},$$

$$C = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}$$

ne s'annulent pas simultanément; 3° à deux points (u, v) distincts correspondent deux points (x, y, z) distincts.

Le point (u, v) décrivant un domaine E_1 borné et parfait, intérieur à E, le point (x, y, z) décrira une surface.

156. Soient

(u, v) un point de E_1;
$(u + du, v + dv) = (U, V)$ un autre point infiniment voisin;
(x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ leurs correspondants.

On aura

$$\Delta x = \frac{d\varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv + R\ du + R_1 dv,$$

$$\Delta y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv + R_2 du + R_3 dv,$$

$$\Delta z = \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv + R_4 du + R_5 dv.$$

Posons

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Cette dernière quantité aura pour valeur principale

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = M\,du^2 + 2N\,du\,dv + P\,dv^2,$$
$$M = \sum \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^2, \qquad N = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\frac{\partial \varphi_i}{\partial v}, \qquad P = \sum \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\right)^2.$$

On verra, comme au n° **146**, que le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ reste constamment compris entre deux nombres positifs fixes M et m.

Si nous supposons que $|du|$ et $|dv|$ ne surpassent pas un nombre ρ suffisamment petit, $|R|$, $|R_1|$, ... resteront moindres qu'une quantité arbitrairement choisie ε, et la distance des points (X, Y, Z) et

$$(\xi, \eta, \zeta) = (x + dx, y + dy, z + dz)$$

(et *a fortiori* la différence $\Delta s - ds$) sera au plus égale à la quantité

$$|R\,du + R_1\,dv| + \ldots < 3\varepsilon[\,|du| + |dv|\,] < 6\varepsilon\,d\sigma.$$

Le rapport $\frac{\Delta s}{d\sigma}$ restera donc compris entre $M + 6\varepsilon$ et $m - 6\varepsilon$.

On en conclut, comme au n° **147**, que, si (U, V) décrit une ligne rectifiable, la ligne correspondante décrite par (X, Y, Z) sera également rectifiable.

157. Si le point (U, V), partant de la position initiale (u, v), se meut dans le plan des u, v, le point

$$\xi = x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv,$$

$$\eta = y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv,$$

$$\zeta = z + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv$$

décrira un plan, dont l'équation

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

s'obtient en éliminant du et dv entre les trois équations ci-dessus.

Supposons que du et dv varient de o à ρ, le point (U, V) décrira un carré Q, et les projections du point (ξ, η, ζ) sur les plans coordonnés, des parallélogrammes, ayant respectivement pour aires $|A|Q$, $|B|Q$, $|C|Q$. Le point (ξ, η, ζ) décrira donc dans l'espace un parallélogramme, d'aire

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,Q.$$

Mais, si ρ est infiniment petit, le point (X, Y, Z) décrira un élément de surface infiniment voisin de l'élément plan décrit par (ξ, η, ζ); nous sommes donc conduits à lui attribuer une aire, ayant pour valeur principale

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,Q,$$

et, par suite, à définir de la manière suivante l'aire Ω_1 de la portion de surface décrite par (x, y, z) lorsque (u, v) décrit E_1 :

Nous décomposerons E_1 en carrés infiniment petits; nous

multiplierons chacun de ces carrés Q_k par

$$\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

A_k, B_k, C_k étant les valeurs de A, B, C en un de ses sommets. La limite de la somme

$$\sum \sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}\, Q_k,$$

qui n'est autre chose que l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{E_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, de,$$

représentera l'aire demandée Ω_1.

Supposons maintenant que E_1 tende vers E; Ω_1 tendra vers une limite Ω, égale à

$$\mathbf{S}_{E} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, de.$$

158. Lorsque la surface décrite par le point (x, y, z) est un plan, l'aire Ω est susceptible d'une mesure directe. Il faut donc établir que notre définition nouvelle n'est pas en discordance avec cette notion déjà acquise. En désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan, nous aurons

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

notre formule devient donc

$$\Omega = \frac{1}{\alpha} \mathbf{S} |A|\, de.$$

Or $\mathbf{S} |A|\, de$ est bien, comme nous l'avons montré (**150**), l'aire de la projection de Ω.

159. Nous devons encore montrer que l'aire, définie comme nous l'avons fait, ne dépend que de la nature de

la surface décrite par (x, y, z) et non du choix particulier des variables auxiliaires u, v. Posons, en effet,

$$u = f_1(u_1, v_1), \qquad v = f_2(u_1, v_1),$$

u_1, v_1 étant deux nouvelles variables qui parcourent un domaine F lorsque (u, v) parcourt le domaine E. On aura

$$x = \varphi_1(f_1, f_2), \qquad y = \varphi_2(f_1, f_2), \qquad z = \varphi_3(f_1, f_2)$$

et, en appelant J le jacobien de f_1, f_2,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial v_1} - \frac{\partial y}{\partial v_1}\frac{\partial z}{\partial u_1} = AJ, \\ B_1 &= BJ, \\ C_1 &= CJ. \end{aligned}$$

L'expression de l'aire en fonction des nouvelles variables u_1, v_1 sera

$$\mathbf{S}_F \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, de_1 = \mathbf{S}_F \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, |J|\, de_1.$$

Or cette intégrale est bien égale à l'intégrale

$$\mathbf{S}_E \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, de$$

prise dans le champ E (152).

XIII. — Formation des équations différentielles.

160. On nomme *équation différentielle de l'ordre n* toute équation entre une variable indépendante x, une fonction y de cette variable et ses n premières dérivées.

161. Soit y une fonction quelconque, définie par l'équation

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

En prenant les dérivées de cette équation, il viendra

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Toute équation déduite de la combinaison de ces équations avec la proposée sera une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction y. Parmi ces équations, il conviendra de rechercher celles qui ont la forme la plus simple ou la plus avantageuse pour le but qu'on se propose.

162. Il arrive souvent que des fonctions dont l'expression contient des transcendantes ou des radicaux satisfont à des équations différentielles d'où ces transcendantes ou ces radicaux ont disparu.

Soit, par exemple,

$$y = \operatorname{arc} \sin x.$$

On en déduit

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où

$$(1 - x^2) y'^2 = 1.$$

Prenant la dérivée de cette équation et supprimant le facteur commun $2y'$, on aura l'équation du second ordre

$$(2) \qquad (1 - x^2) y'' - xy' = 0.$$

On peut déduire de cette équation une formule récurrente commode pour le calcul des dérivées successives de y. Prenons en effet la dérivée $m^{\text{ième}}$ de cette équation; il viendra, en appliquant la formule connue qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'un produit,

$$(1 - x^2) y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1) y^{(m)}$$
$$- xy^{(m+1)} - my^{(m)} = 0$$

et, en réduisant,

$$(1 - x^2)y^{(m+2)} - (2m + 1)xy^{(m+1)} - m^2y^{(m)} = 0.$$

Cette formule se simplifie pour la valeur particulière $x = 0$. Si l'on désigne par y_0, y'_0, ... ce que deviennent alors y, y', ..., il viendra

$$y_0^{(m+2)} = m^2 y_0^{(m)}.$$

On aura, par suite,

$$y''_0 = 0, \qquad y_0^{(4)} = 2^2 y''_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad y_0^{(2n)} = 0,$$

$$y'''_0 = 1^2 y'_0 = \pm 1^2,$$

$$y_0^{(5)} = 3^2 y'''_0 = \pm 1^2.3^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_0^{(2n+1)} = \pm 1^2.3^2 \ldots (2n-1)^2.$$

163. Considérons en second lieu l'expression

$$y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Prenons la *dérivée logarithmique* des deux membres, c'est-à-dire la dérivée de leurs logarithmes; il viendra

$$\frac{y'}{y} = n\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{n}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

d'où

$$(x^2 - 1)y'^2 = n^2y^2,$$

ou, en prenant la dérivée et supprimant le facteur commun $2y'$,

$$(3) \qquad (x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0.$$

Prenant la dérivée $m^{\text{ième}}$ de cette équation, on aura la formule récurrente

$$(x^2 - 1)y^{(m+2)} + 2mxy^{(m+1)}$$
$$+ m(m-1)y^{(m)} + xy^{(m+1)} + my^{(m)} - n^2y^{(m)} = 0$$

ou, en réduisant,

$$(x^2 - 1)y^{(m+2)} + (2m + 1)xy^{(m+1)} + (m^2 - n^2)y^{(m)} = 0.$$

Pour $x = 0$, cette formule se réduit à

$$(4) \qquad y_0^{(m+2)} = (m^2 - n^2) y_0^{(m)}.$$

164. L'équation différentielle (3) subsisterait évidemment, ainsi que la formule (4) qui en est la conséquence, si l'on changeait le signe du radical dans l'expression de y. Elle subsistera encore si l'on pose

$$y = C(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + C'(x - \sqrt{x^2 - 1})^n,$$

C et C' étant deux constantes quelconques, car le résultat de la substitution de cette quantité dans le premier membre de (3), étant évidemment égal à C fois le résultat de la substitution de $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ plus C' fois le résultat de la substitution de $(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$, sera nul.

Soit, en particulier, $C = C' = \frac{1}{2}$, et supposons n entier et positif. L'expression

$$y = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$$

étant développée suivant la formule du binôme, les puissances impaires du radical se détruiront, et l'on obtiendra évidemment un polynôme entier de la forme

$$y = A_n x^n + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_{n-2p} x^{n-2p} + \ldots.$$

Le coefficient A_n peut se calculer aisément. On a en effet, en divisant par x^n et faisant tendre x vers ∞,

$$A_n = \lim \frac{y}{x^n}$$

$$= \lim \left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] = 2^{n-1}.$$

Pour calculer les autres coefficients, on remarquera qu'on a, en général,

$$y_0^{n-2p} = 1.2\ldots(n - 2p) A_{n-2p},$$
$$y_0^{n-2p-2} = 1.2\ldots(n - 2p - 2) A_{n-2p-2},$$

d'où

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p}(n-2p)(n-2p-1)\frac{y_0^{n-2p-2}}{y_0^{n-2p}}$$

ou, d'après la formule (4),

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p}\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(n-2p-2)^2-n^2}.$$

Cette relation permettra de calculer successivement tous les coefficients, en partant du premier.

Posons

$$x = \cos\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{x^2-1} = i\sin\varphi;$$

il viendra

$$y = \tfrac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + \tfrac{1}{2}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

ou, d'après une formule que nous établirons plus loin,

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + \tfrac{1}{2}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \\ &= \cos n\varphi = \cos n(\operatorname{arc}\cos x). \end{aligned}$$

Nous venons donc d'obtenir le développement de $\cos n\varphi$, suivant les puissances de $\cos\varphi$.

165. Soit, comme dernier exemple, l'expression

$$y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Posons, pour abréger,

$$(x^2-1)^n = z.$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression, il viendra

$$\frac{2nx}{x^2-1} = \frac{z'}{z}$$

ou

$$(x^2-1)z' - 2nxz = 0.$$

Prenons la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de cette équation; on trouvera

$$(x^2-1)z^{(n+2)}+(n+1)2xz^{(n+1)}+\frac{(n+1)n}{2}2z^{(n)}$$
$$-2nxz^{(n+1)}-2n(n+1)z^{(n)}=0$$

ou, en remplaçant $z^{(n)}$ par y et réduisant,

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

166. Considérons une équation

$$F(x, y, c_1, \ldots, c_n)=0,$$

contenant, outre les variables x, y, n constantes $c_1, \ldots, c_n$. Cette équation représente une infinité de fonctions distinctes, que l'on obtiendra en donnant successivement aux constantes tous les systèmes de valeurs possibles. Toutes ces fonctions satisferont à une même équation différentielle de l'ordre n, qu'il est facile de former. Prenons, en effet, les n premières dérivées de cette équation; on obtiendra les nouvelles équations suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y}y^{(n)}=0.$$

Entre ces équations et la proposée, éliminons les constantes $c_1, \ldots, c_n$; nous obtiendrons l'équation cherchée

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0.$$

167. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}=1,$$

où A et B sont des constantes déterminées et λ un paramètre

variable. Cette équation, considérée au point de vue géométrique, représente un système de coniques *homofocales*. (Si nous supposons, pour fixer les idées, $A > B$, les foyers réels seront sur l'axe des x, à la distance $\pm\sqrt{A-B}$ de l'origine.)

Prenons la dérivée de cette équation; il viendra, en supprimant le facteur commun 2,

$$\frac{x}{A+\lambda} + \frac{yy'}{B+\lambda} = 0.$$

Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{1}{A+\lambda} = \frac{y'}{x^2y' - xy}, \qquad \frac{1}{B+\lambda} = \frac{1}{y^2 - xyy'},$$

$$A+\lambda = \frac{x^2y' - xy}{y'}, \qquad B+\lambda = y^2 - xyy'.$$

Éliminant λ, on aura l'équation différentielle de ce système de coniques

$$A - B = \frac{x^2y' - xy}{y'} - y^2 + xyy'$$

ou

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - A + B)y' - xy = 0.$$

168. Considérons l'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

qui, considérée au point de vue géométrique, représente l'équation générale des cercles. Cette équation contenant trois constantes, l'équation différentielle qui s'en déduit sera du troisième ordre. Pour l'obtenir, nous formerons les dérivées successives

$$x + yy' + a + by' = 0$$

(nous avons supprimé le facteur 2 pour plus de simplicité),

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0,$$
$$3y'y'' + yy''' + by''' = 0.$$

Éliminant b entre ces deux dernières équations, nous ob-

tiendrons l'*équation différentielle des cercles*

$$(1+y'^2+yy'')y'''-y''(3y'y''+yy''')=0$$

ou, en réduisant,

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0.$$

169. L'équation différentielle des coniques a été obtenue par M. Halphen de la manière suivante :

L'ordonnée y d'une conique est définie par l'équation

$$y=ax+b\pm(px^2+2qx+r)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit, par des dérivations successives,

$$y'=a\pm(px+q)(px^2+2qx+r)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}y''&=\pm p(px^2+2qx+r)^{-\frac{1}{2}}\mp(px+q)^2(px^2+2qx+r)^{-\frac{3}{2}}\\&=\pm\frac{p(px^2+2qx+r)-(px+q)^2}{(px^2+2qx+r)^{\frac{3}{2}}}\\&=\pm\frac{pr-q^2}{(px^2+2qx+r)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

d'où

$$(5)\qquad y''^{-\frac{2}{3}}=\frac{px^2+2qx+r}{(pr-q^2)^{\frac{2}{3}}}$$

et, en effectuant trois nouvelles dérivations,

$$(6)\qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'''=0.$$

Si la conique est une parabole, p sera nul. Le second membre de l'équation (5) ne contenant pas de terme en x^2, deux dérivations suffiront pour faire disparaître les autres constantes. L'équation différentielle des paraboles sera donc

$$(7)\qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''=0.$$

Il est aisé d'obtenir les équations (6) et (7) sous forme

développée. On a, en effet,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\tfrac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''',$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \tfrac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^{2} - \tfrac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{IV}},$$

$$\begin{aligned}\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = &-\tfrac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^{3} + \tfrac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}} \\ &+ \tfrac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{\mathrm{IV}} - \tfrac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{V}}.\end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans les équations (6) et (7), chassant les dénominateurs et supprimant le facteur commun 2, il viendra, pour l'équation générale des coniques,

$$-40y'''^{3} + 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} - 9y''^{2}y^{\mathrm{V}} = 0$$

et, pour celle des paraboles,

$$5y'''^{2} - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0.$$

170. Cherchons enfin la condition pour que des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'une même variable x soient liées par une équation linéaire à coefficients constants

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0.$$

Prenant les dérivées successives de cette équation, il viendra

$$\begin{array}{l} C_1 y'_1 \quad + C_2 y'_2 \quad + \ldots + C_n y'_n \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{array}$$

et, en éliminant les constantes,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y'_1 & y'_2 & & y'_n \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

On verra dans le Calcul intégral que cette condition est suffisante.

171. On donne le nom d'*équation aux dérivées partielles d'ordre n* à toute équation entre des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, une fonction z de ces variables et ses dérivées partielles des n premiers ordres.

172. Soit

$$F(x_1, \ldots, x_p, z, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

une équation contenant n constantes arbitraires et définissant une fonction z des p variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$. On pourra joindre à cette équation ses p dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_p} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_p} = 0$$

par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$, puis ses $\frac{p(p+1)}{2}$ dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre total

$$k = 1 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots\rho}$$

des équations ainsi obtenues surpasse le nombre n des constantes arbitraires. Éliminant ces n constantes entre les k équations, on obtiendra un système de $k-n$ équations aux dérivées partielles d'ordre ρ, à chacune desquelles z satisfera, quelles que soient les valeurs des constantes $c_1, \ldots, c_n$.

173. Considérons maintenant la fonction z définie par l'équation plus générale

$$F[x_1, \ldots, x_p, z, \varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \varphi_2(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}), \ldots] = 0,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \ldots$ désignent des fonctions connues de $x_1, \ldots, x_p, z$, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions arbitraires. Joignons à cette équation ses dérivées partielles successives des ordres $1, 2, \ldots, \rho$. Nous obtiendrons ainsi

$$1+p+\frac{p(p+1)}{2}+\ldots+\frac{p(p+1)\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots\rho}=k$$

équations, dans lesquelles figureront les quantités suivantes : 1° $x_1, \ldots, x_p, z$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre ρ ; 2° la fonction φ_1 et ses dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{p-1}}$, $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha_1^2}, \ldots$ jusqu'à l'ordre ρ, la fonction φ_2 et ses dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_1}, \ldots$ jusqu'à l'ordre ρ, etc. Le nombre l de ces dernières quantités sera évidemment égal à

$$n\left[1+p-1+\ldots+\frac{(p-1)p\ldots(p+\rho-2)}{1.2\ldots\rho}\right],$$

n désignant le nombre des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Donnons successivement à ρ les valeurs $1, 2, 3, \ldots$. Il arrivera nécessairement un moment où le nombre k des équations surpassera le nombre l. En effet, en changeant ρ en $\rho+1$, on accroît le nombre des équations de $\frac{p(p+1)\ldots(p+\rho)}{1.2\ldots(\rho+1)}$, tandis que le nombre l s'accroît de $n\,\frac{(p-1)p\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots(\rho+1)}$, quantité inférieure à la précédente, si $p+\rho>n(p-1)$. Donc, dès que ρ surpassera $n(p-1)-p$, k croîtra plus rapidement que l et finira par le surpasser. A ce moment, on pourra éliminer entre les k équations obtenues les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et leurs dérivées partielles; on obtiendra ainsi $k-l$ équations entre $x_1, \ldots, x_p, z$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre ρ, et la fonction z satisfera à ce système d'équations, de quelque manière que soient choisies les fonctions arbitraires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Nous allons faire quelques applications de cette théorie.

174. Supposons d'abord que l'équation qui détermine z soit de la forme

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0, \tag{8}$$

$u_1, \ldots, u_p$ désignant des fonctions connues des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$ et de z. Si l'on conçoit que z ait été remplacé par sa valeur en $x_1, \ldots, x_p$, $u_1, \ldots, u_p$ deviendront des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$ seulement, ayant pour dérivées partielles

$$\begin{array}{ccc}
D_{x_1} u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & D_{x_p} u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_p}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
D_{x_1} u_p = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & D_{x_p} u_p = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_p} + \dfrac{\partial u_p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_p}.
\end{array}$$

Pour que ces fonctions soient liées par une relation telle que (8), il faut et il suffit que leur jacobien soit nul : on pourra donc écrire immédiatement l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{vmatrix} D_{x_1} u_1 & & D_{x_p} u_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{x_1} u_p & \ldots & D_{x_p} u_p \end{vmatrix} = 0,$$

à laquelle z doit satisfaire.

Voici quelques exemples :

175. L'équation

$$x - az = \varphi(y - bz) \tag{9}$$

représente un cylindre parallèle à la droite ($x = az$, $y = bz$). En effet, cette surface a une infinité de génératrices rectilignes parallèles à cette droite et données par les équations

$$x - az = \varphi(\alpha),$$
$$y - bz = \alpha,$$

α étant un paramètre constant pour une même génératrice, mais variable d'une génératrice à l'autre.

En faisant varier la forme de la fonction φ, on aura une infinité de cylindres différents. Ils satisfont tous à une même équation aux dérivées partielles, que l'on peut écrire immédiatement.

En effet, l'équation (9) établissant une relation entre les deux fonctions $x - az$, $y - bz$ des deux variables indépendantes x et y, le jacobien de ces fonctions sera nul, ce qui donnera l'équation

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} & -b\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -a\dfrac{\partial z}{\partial y} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y}.$$

176. L'équation

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire, représente un système de cônes ayant pour sommet le point (a, b, c) et pour génératrice les droites

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi(\alpha), \quad \frac{y-b}{z-c} = \alpha.$$

L'équation aux dérivées partielles de ces cônes s'obtiendra en égalant à zéro le jacobien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{z-c} - \dfrac{(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-c)^2} & -\dfrac{y-b}{(z-c)^2}\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -\dfrac{(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} & \dfrac{1}{z-c} - \dfrac{(y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} \end{vmatrix},$$

ce qui donne, en effectuant les calculs et chassant les dénominateurs,

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

177. L'équation

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$$

représente un système de surfaces de révolution dont les parallèles

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(\alpha),$$
$$ax+by+cz=\alpha$$

sont perpendiculaires à l'axe $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\cdot$

Ces surfaces satisferont à l'équation

$$o=\begin{vmatrix} x+z\frac{\partial z}{\partial x} & a+c\frac{\partial z}{\partial x} \\ y+z\frac{\partial z}{\partial y} & b+c\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ou

$$bx-ay=(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}\cdot$$

178. Une fonction u de plusieurs variables x, y, z est dite *homogène et d'ordre* n si elle peut se mettre sous la forme

$$u=z^n\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\cdot$$

Il résulte de cette équation que $z^{-n}u$ est fonction de $\frac{x}{z}$ et de $\frac{y}{z}\cdot$ On aura donc, en égalant à zéro le jacobien,

$$o=\begin{vmatrix} z^{-n}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{z} & o \\ z^{-n}\frac{\partial u}{\partial y} & o & \frac{1}{z} \\ z^{-n}\frac{\partial u}{\partial z}-nz^{-1-n}u & -\frac{x}{z^2} & -\frac{y}{z^2} \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant les calculs et chassant le dénominateur z^{n+3},

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu.$$

179. Comme seconde application de la théorie générale de l'élimination des fonctions arbitraires, considérons un système de p fonctions z, α_1, ..., α_{p-1} des p variables indépendantes x_1, ..., x_p, déterminées par le système des équations simultanées

$$F_1(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_p(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

où φ_1, ..., φ_n désignent des fonctions arbitraires de α_1, ..., α_{p-1}. Nous allons montrer que z satisfait à une équation aux dérivées partielles d'ordre n, indépendante de ces fonctions.

Formons, en effet, la dérivée partielle de F_1 par rapport à x_1; elle se composera :

1° Des termes $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$, dus à la variation de x_1 et de z; nous les désignerons, pour abréger, par $D_{x_1}F_1$;

2° Des termes $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \ldots\right)\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}$, dus à la variation de α_1; nous les désignerons par $D_{\alpha_1}F_1\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}$;

3° Des termes analogues $D_{\alpha_2}F_1\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$, ..., dus à la variation des autres paramètres α_2, ...

Réunissant tous ces termes, on aura l'équation

$$D_{x_1}F_1 + D_{\alpha_1}F_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + D_{\alpha_2}F_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \ldots = 0.$$

Les dérivées partielles par rapport à x_2, ... donneront de même

$$D_{x_2}F_1 + D_{\alpha_1}F_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + D_{\alpha_2}F_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \ldots = 0.$$

Éliminant entre ces p équations les $p-1$ quantités $D_{\alpha_1}F_1$,

$D_{\alpha_2}F_1, \ldots$, il viendra

$$\begin{vmatrix} D_{x_1}F_1 & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_1} & \ldots \\ D_{x_2}F_1 & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_2} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, développé, sera de la forme

$$AD_{x_1}F_1 + BD_{x_2}F_1 + \ldots = 0,$$

A, B, ... étant des fonctions de $\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_2}, \ldots$.

Les équations $F_2 = 0, \ldots$ donneront de même

$$AD_{x_1}F_2 + BD_{x_2}F_2 + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Éliminons entre les équations qui viennent d'être obtenues les rapports des coefficients A, B, ...; il viendra

$$\begin{vmatrix} D_{x_1}F_1 & D_{x_2}F_1 & \ldots \\ D_{x_1}F_2 & D_{x_2}F_2 & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation sera une fonction de $x_1, \ldots, x_p, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_p}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, que nous désignerons par F_{p+1}.

Désignons par $D_{x_i}F_{p+1}$ la portion de la dérivée partielle de F_{p+1} par rapport à x_i qui provient de la variation de x_i, $z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_p}$; on trouvera de la même manière une nouvelle équation

$$F_{p+2} = \begin{vmatrix} D_{x_1}F_{p+1} & D_{x_2}F_{p+1} & \ldots \\ D_{x_1}F_2 & D_{x_2}F_2 & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle figureront, outre les quantités précédentes, les dérivées secondes de z.

Continuant ainsi, on obtiendra une suite d'équations

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0, \quad F_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad F_{p+n} = 0,$$

entre lesquelles on pourra éliminer les $p - 1 + n$ quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ce qui donnera une équation aux dérivées partielles d'ordre n.

180. *Exemple.* — Cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces *réglées*. On nomme ainsi celles qui sont engendrées par le mouvement d'une droite. Les génératrices d'une telle surface auront des équations de la forme

$$F_1 = x - az - \alpha = 0,$$
$$F_2 = y - bz - \beta = 0.$$

Trois conditions sont d'ailleurs nécessaires pour déterminer le mouvement de la droite. Ces conditions permettront d'exprimer trois des coefficients, par exemple a, b, β, en fonction du quatrième, α.

Appliquons la méthode précédente. Nous formerons l'équation

$$0 = F_3 = \begin{vmatrix} D_x F_1 & D_y F_1 \\ D_x F_2 & D_y F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} & -a\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ -b\dfrac{\partial z}{\partial x} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$
$$= 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'équation suivante sera

$$0 = \begin{vmatrix} D_x F_3 & D_y F_3 \\ -b\dfrac{\partial z}{\partial x} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right) D_x F_3 + b\frac{\partial z}{\partial x} D_y F_3$$

ou, en remplaçant $1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y}$ par $a\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et supprimant le fac-

teur commun $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}
\text{o} &= a\,\mathrm{D}_x\,\mathrm{F}_3 + b\,\mathrm{D}_y\,\mathrm{F}_3 \\
&= a\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) + b\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\
&= a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{F}_4.
\end{aligned}$$

On trouvera de même l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\text{o} = \mathrm{F}_5 &= a\,\mathrm{D}_x\,\mathrm{F}_4 + b\,\mathrm{D}_y\,\mathrm{F}_4 \\
&= a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3a^2 b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,dy} + 3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.
\end{aligned}$$

On n'aura plus, pour obtenir l'équation aux dérivées partielles, qu'à éliminer le rapport $\dfrac{b}{a}$ entre les deux équations F_4 et F_5.

181. Considérons enfin une fonction z définie, ainsi que les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$, par un système d'équations de la forme suivante

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l}
f(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \text{o}, \\
\mathrm{D}_{\alpha_1} f = \text{o}, \qquad \mathrm{D}_{\alpha_2} f = \text{o}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{D}_{\alpha_{p-1}} f = \text{o}.
\end{array}\right.$$

Prenons les dérivées partielles de f par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$. En vertu des équations (10), ces dérivées se réduiront à leurs premiers termes $\mathrm{D}_{x_1} f, \ldots, \mathrm{D}_{x_p} f$. On aura donc

$$\mathrm{D}_{x_1} f = \text{o}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{D}_{x_p} f = \text{o}.$$

Désignons ces équations par

$$\mathrm{F}_1 = \text{o}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_p = \text{o}.$$

On en déduira, comme dans le problème précédent, une suite de nouvelles équations

$$\mathrm{F}_{p+1} = \text{o}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_{p+n-1} = \text{o}.$$

Ces équations, jointes aux précédentes et à la primitive $f = 0$, fourniront un système de $p + n$ équations, entre lesquelles on éliminera $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. L'équation résultante sera encore de l'ordre n. En effet, $F_1, \ldots, F_p$ contiennent z et ses dérivées partielles du premier ordre; F_{p+1} contiendra, en outre, celles du second ordre, etc.; enfin F_{p+n-1} contiendra celles du $n^{\text{ième}}$ ordre.

182. *Exemple.* — Cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces *développables*. On nomme ainsi celles qui sont définies par le système des deux équations

$$f = z - \alpha x - \beta y - \gamma = 0, \qquad D_\alpha f = 0,$$

β et γ étant des fonctions de α.

On en déduira, d'après la méthode précédente,

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha = 0,$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \beta = 0,$$

puis

$$F_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sera l'équation cherchée.

CHAPITRE II.

VARIABLES COMPLEXES.

I. — Fonctions synectiques.

183. L'introduction des nombres irrationnels ne suffit pas encore pour rendre résolubles toutes les équations algébriques. Il est nécessaire pour cela de faire intervenir une dernière notion, celle des *nombres complexes*.

Soit $P = Ai^m + Bi^{m-1} + \ldots + K$ un polynôme entier, à coefficients réels, contenant une indéterminée i. En le divisant par $i^2 + 1$, on obtiendra un résultat de la forme

$$P = Q(i^2 + 1) + a + bi.$$

Nous conviendrons de négliger les multiples de $i^2 + 1$, et de considérer comme équivalents et représentant un seul *nombre complexe* (ou *imaginaire*), tous les polynômes qui donnent le même reste. Parmi ces polynômes, le plus simple est le reste $a + bi$ lui-même, qui sera la forme normale du nombre complexe. La manière la plus simple de former ce reste consiste à remplacer partout dans P i^2 par -1, i^3 par $-i$, i^4 par $+1$, i^5 par i, etc.

Si $b = 0$, ce nombre sera réel; si $a = 0$, on dira qu'il est *purement imaginaire;* si $a = b = 0$, il sera nul.

Un nombre complexe $a + bi$ peut être représenté géométriquement par un segment de droite, dont les projections sur deux axes rectangulaires Ox et Oy soient respectivement a et b. Soient ρ la longueur de cette droite, φ l'angle qu'elle

fait avec OX; on aura

$$\rho\cos\varphi = a, \qquad \rho\sin\varphi = b,$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\rho}.$$

La quantité ρ, qui doit être prise positivement, se nomme la *valeur absolue* ou le *module* de $a+bi$; on la représente par la notation $|a+bi|$ ou $\mathrm{mod}(a+bi)$.

L'angle φ est l'*argument* de $a+bi$; il n'est déterminé qu'aux multiples près de 2π, lorsque a et b sont donnés. Le module, au contraire, est entièrement déterminé; il ne s'annule que si l'on a simultanément $a=0$, $b=0$, d'où $a+bi=0$.

Deux nombres complexes $a+bi$ et $a-bi$, qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire, sont dits *conjugués* entre eux. Ces nombres ont le même module, ainsi que les nombres $-a-bi$, $-a+bi$, qui leur sont égaux et opposés.

Si la droite représentative du nombre $a+bi$ a son point de départ à l'origine des coordonnées, son autre extrémité sera au point $x=a$, $y=b$. Ce point se nomme l'*affixe* de $a+bi$.

184. Soient $a+bi$, $a'+b'i$, ... des quantités complexes. Leur somme

$$(a+a'+\ldots)+(b+b'+\ldots)i$$

sera évidemment représentée par la résultante des droites qui représentent séparément les nombres $a+bi$, $a'+b'i$, ... D'après les propriétés connues de la résultante, nous pourrons énoncer la propriété fondamentale suivante :

Le module d'une somme de quantités complexes ne peut surpasser la somme de leurs modules; mais, d'autre part, il est au moins égal au plus grand de ces modules, diminué de la somme des autres.

On peut remarquer encore que, si les directions des droites

composantes sont toutes comprises dans l'intérieur d'un angle d'ouverture inférieure à π, la résultante y sera également contenue.

Donc, *si les termes d'une somme ont des arguments dont les différences mutuelles soient toutes* $< \pi$, *l'argument de la somme sera intermédiaire entre les arguments de ses termes.*

La différence de deux nombres complexes $a + bi$, $a' + b'i$ sera définie par l'expression

$$(a - a') + (b - b')i,$$

dont le module sera compris entre la somme et la différence des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$.

185. Le produit des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$ sera donné par la formule

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + (ba' + ab')i + bb'i^2,$$

ou, en divisant par $i^2 + 1$ et ne gardant que le reste,

$$(aa' - bb') + (ba' + ab')i.$$

Ce résultat prend une forme plus intéressante si l'on met en évidence le module et l'argument des deux facteurs considérés; on aura alors

$$\begin{aligned} a + bi &= \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ a' + b'i &= \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \end{aligned}$$

et, pour le produit,

$$\begin{aligned} &\rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi)] \\ &= \rho\rho'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Donc *le module d'un produit est le produit des modules des facteurs, et son argument la somme de leurs arguments.*

186. Le *rapport* des deux nombres $a + bi$ et $a' + b'i$

sera le nombre $x+yi$ qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende. On devra donc avoir

$$a+bi=(a'+b'i)(x+yi)=a'x-b'y+i(b'x+a'y).$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes

$$a'x-b'y=a, \qquad b'x+a'y=b,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}, \qquad y=\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Le problème comporte donc une solution unique et toujours admissible, si le diviseur $a'+b'i$ est différent de zéro.

Il est manifeste que les règles du calcul algébrique s'étendent aux nombres complexes.

187. On dit qu'un nombre complexe variable $x+iy$ tend vers une limite fixe $c+di$, si

$$|x+iy-(c+di)|=\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

tend vers zéro.

Cette expression est au moins égale à $|x-c|$ et à $|y-d|$. Elle ne peut donc tendre vers zéro que si x tend vers c et y vers d.

Cette condition est suffisante, car on a

$$|x+iy-c+di| \overline{\overline{<}} |x-c|+|y-d|,$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro, si x tend vers c et y vers d.

Les propriétés des modules d'une somme algébrique ou d'un produit démontrées aux n^os 184 et 185 sont précisément les mêmes qui ont été signalées au n° 6 dans le cas particulier des nombres réels et qui ont servi de fondement dans le § II pour l'étude des ensembles. Les propriétés trouvées dans ce paragraphe subsistent donc dans le cas où les variables x, y, ... parcourraient non plus la suite des nombres réels, mais celle des nombres complexes.

188. Soient $x, y, \ldots$ des variables indépendantes réelles, P et Q des fonctions réelles de ces variables, définies dans l'intérieur d'un domaine E et admettant des dérivées partielles continues. La fonction complexe $u = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ admettra des dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}, \ldots$ également continues, et son accroissement Δu, lorsqu'on passe du point $(x, y, \ldots)$ au point $(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots)$ sera de la forme

$$\begin{aligned}\Delta u = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)\Delta y + \ldots \\ + (\mathrm{R} + \mathrm{S}i)\,\Delta x + (\mathrm{R}_1 + \mathrm{S}_1 i)\,\Delta y + \ldots,\end{aligned}$$

$\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{R}_1, \mathrm{S}_1, \ldots$ tendant vers zéro avec $\Delta x, \Delta y, \ldots$ (et cela uniformément dans tout ensemble E_1 borné et parfait intérieur à E).

Supposons les variables $x, y, \ldots$ en nombre pair; représentons-les par $x, y;\ x_1, y_1;\ \ldots$ et formons les combinaisons complexes

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1,$$

On aura

$$\begin{aligned}&\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \qquad \Delta z_1 = \Delta x_1 + i\Delta y_1, \qquad \ldots, \\ &|\Delta z| \gtreqless |\Delta x| \gtreqless |\Delta y|, \qquad |\Delta z_1| \gtreqless |\Delta x_1| \gtreqless |\Delta y_1|.\end{aligned}$$

L'expression

$$(\mathrm{R} + \mathrm{S}i)\,\Delta x + (\mathrm{R}_1 + \mathrm{S}_1 i)\,\Delta y + \ldots$$

pourra donc se mettre sous la forme

$$\rho\,\Delta z + \rho_1\,\Delta z_1 + \ldots,$$

les quantités

$$\rho = (\mathrm{R} + \mathrm{S}i)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\mathrm{R}_1 + \mathrm{S}_1 i)\frac{\Delta y}{\Delta z}, \qquad \rho_1 = \ldots,$$

tendant encore vers zéro en même temps que $\Delta x, \Delta y, \Delta x_1, \Delta y_1, \ldots$ (et cela uniformément dans E_1).

Si, d'autre part, nous supposons les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \dots$ liées par les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}, & \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_1}=\dfrac{\partial Q}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial P}{\partial y_1}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

les termes de la première ligne de l'expression de Δu pourront s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)(\Delta x_1+i\Delta y_1)+\dots \\ &\quad=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta z+\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\Delta z_1+\dots. \end{aligned}$$

On aura donc finalement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u=&\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta z+\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\Delta z_1+\dots \\ &+\rho\Delta z+\rho_1\Delta z_1+\dots. \end{aligned}\right.$$

Lorsque les conditions ci-dessus seront satisfaites, nous dirons que u est dans l'intérieur de E une *fonction synectique* des variables complexes $z, z_1, \dots$. Les termes de la première ligne du développement (2) seront sa différentielle totale du.

Posons, en particulier, $\Delta z_1=0$, $\Delta z_2=0$, ...; nous aurons

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+\rho.$$

Si Δz tend vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tendra vers une limite $\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}$, indépendante du rapport des deux infiniment petits Δx et Δy. Cette limite se nomme la *dérivée partielle de u par rapport à z* et se représentera par la notation usuelle $\frac{\partial u}{\partial z}$. (Si u ne dépendait que d'une seule variable complexe, on

l'appellerait simplement la *dérivée* de u et on la représenterait par $\frac{du}{dz}$ ou u'.)

La fonction u admettra de même, par rapport aux autres variables $z_1, \ldots,$ des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial y_1},$$

Toutes ces dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \cdots$ seront d'ailleurs des fonctions continues de $x, y, x_1, y_1, \ldots$.

189. Réciproquement, pour que l'expression $P + Qi$, où P, Q sont des fonctions de $x, y, x_1, y_1, \ldots$ définies dans l'ensemble E, admette des dérivées partielles continues $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z_1}, \cdots$ indépendantes, la première du rapport de Δx à Δy, la seconde du rapport de Δx_1 à Δy_1, etc., il faudra que P et Q admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}, \cdots$ liées par les relations (1).

En effet, changeant x en $x + \Delta x$, sans altérer $y, x_1, y_1, \ldots,$ on aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x}.$$

Pour que cette expression tende vers une limite fixe $\frac{\partial u}{\partial z}$, il faut que $\frac{\Delta P}{\Delta x}, \frac{\Delta Q}{\Delta x}$ tendent vers des limites.

Donc P et Q doivent admettre des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, et l'on aura

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Changeons de même y en $y + \Delta y$, sans altérer les autres

variables. On aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{i\,\Delta y} = \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{i\,\Delta y} = \frac{\Delta Q - i\,\Delta P}{\Delta y}.$$

Pour que cette expression tende vers la limite $\frac{\partial u}{\partial z}$, lorsque Δy tend vers zéro, il faut que $\frac{\Delta Q}{\Delta y}$, $\frac{\Delta P}{\Delta y}$ tendent vers des limites $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, et l'on aura

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dQ}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Pour que cette expression de $\frac{\partial u}{\partial z}$ coïncide avec la précédente, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Enfin, pour que $\frac{\partial u}{\partial z}$ soit continue, il faut que sa partie réelle et sa partie imaginaire le soient. Donc $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ doivent être continues.

On obtient des résultats analogues pour les autres dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \ldots.$

190. *Remarques.* — 1° Si l'on veut que $P + Qi$ soit une fonction synectique de z, z_1 ..., aucune des deux fonctions P et Q ne pourra être choisie arbitrairement; car les deux premières équations (1), dérivées respectivement par rapport à x et y et ajoutées ensemble, donnent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Dérivées par rapport à y et x, puis retranchées, elles

donnent

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} = 0,$$

2° Si l'on admet (ce qui a toujours lieu, comme on le verra plus loin) que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \cdots$ existent et sont continues dans l'intérieur de E, $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \cdots$ seront encore des fonctions synectiques de $z, z_1, \ldots$.

En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

par exemple, admet des dérivées partielles continues

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y},\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial x_1} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial x_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que ces dérivées partielles satisfont aux relations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},\\
\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial y_1}, & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial y_1} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Or celles-ci s'obtiennent immédiatement en dérivant les équations (1) par rapport à $x, x_1, \ldots$.

3° Si nous représentons par $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z_1}, \cdots$ les dérivées

de $\frac{\partial u}{\partial z}$, par rapport à z, z_1, ..., on aura

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial z_1} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial x_1} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial x_1}$$
$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\,\partial x} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial z_1}.$$

4° Si nous supposons u indépendant de z, on aura $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $u = z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$. Si donc, dans l'équation

$$du = \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial u}{\partial z_1}\Delta z_1 + \ldots,$$

qui définit du, nous posons $u = z$, il viendra $dz = \Delta z$. De même $dz_1 = \Delta z_1$, ..., et, par suite,

$$du = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial z_1}dz_1 + \ldots.$$

5° Les théorèmes du n° 75 et la règle plus générale du n° 88 pour la dérivation des fonctions composées s'appliquent sans changement aux fonctions synectiques de variables complexes.

191. Théorème. — *Soit* $F(z, z_1, \ldots)$ *une fonction synectique de*

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1,$$

définie aux environs du point

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad \zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1,$$

et s'annulant en ce point sans que sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial z}$ *s'y annule.*

On pourra déterminer une fonction synectique de z_1, ..., *définie aux environs du point* $(\zeta_1, \ldots)$, *prenant en ce point la valeur* ζ *et qui, substituée dans l'équation* $F(z, z_1, \ldots) = 0$, *la rende identiquement satisfaite. Cette*

fonction sera unique et admettra aux environs du point $(\zeta_1, \ldots)$ *les dérivées partielles*

$$(3)\qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

Soit, en effet,

$$F(z, z_1, \ldots) = P + Qi,$$

P et Q étant des fonctions de $x, y; x_1, y_1; \ldots$.

On a, par définition,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, & \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Q}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial P}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

de P et Q par rapport à x, y se réduira, en vertu de ces équations, à

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2,$$

ce qui est le carré du module de la dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Celle-ci ne s'annulant pas au point initial $(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \ldots)$ J ne s'y annulera pas. On pourra donc déterminer, et cela d'une seule manière, aux environs du point $(\xi_1, \eta_1, \ldots)$ deux fonctions réelles x, y des variables indépendantes $x_1, y_1, \ldots$, satisfaisant identiquement aux équations $P = 0$, $Q = 0$ (ou, ce qui revient au même, à l'équation $F = 0$) et se réduisant

respectivement à ξ, η au point $(\xi_1, \eta_1, \ldots)$. Les différentielles totales de ces fonctions seront données par les équations

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial P}{\partial y_1}dy_1 + \ldots = 0.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial y_1}dy_1 + \ldots = 0$$

ou, en vertu des équations (1),

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx - \frac{\partial Q}{\partial x}dy + \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial Q}{\partial x_1}dy_1 + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy + \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_1}dy_1 + \ldots = 0.$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la seconde par i; il viendra

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(dx + i\,dy)$$
$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)(dx_1 + i\,dy_1) + \ldots = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial z_1}dz_1 + \ldots = 0.$$

Cette relation montre que la quantité complexe z est bien une fonction synectique de $z_1, \ldots$ et a pour dérivées partielles les expressions (3). Elle satisfait d'ailleurs à l'équation $F = 0$ et se réduit à $\xi + i\eta$ au point $(\zeta_1, \ldots)$.

Le théorème que nous venons d'établir est entièrement semblable à celui démontré (**91**) pour les fonctions de variables réelles. Les conséquences déduites de ce dernier (**92** à **95**) subsistent évidemment aussi pour les fonctions synectiques de variables complexes.

192. Les conditions qui expriment que $u = P + Qi$ est une fonction de $z = x + iy$ sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable.

Marquons en effet, sur le plan, le point qui a pour affixe $u = f(z)$. A chaque point z correspond un point u, à chaque ligne décrite par z, une ligne décrite par u.

Considérons trois points z, $z + \Delta z$, $z + \Delta_1 z$ formant un triangle infiniment petit, dont les côtés auront respectivement pour longueurs $|\Delta z|$, $|\Delta_1 z|$, $|\Delta_1 z - \Delta z|$.

Les points correspondants u, $u + \Delta u$, $u + \Delta_1 u$ formeront un autre triangle, dont les côtés auront pour longueurs

$$|\Delta u| = |[f'(z) + R]\Delta z|,$$
$$|\Delta_1 u| = |[f'(z) + R_1]\Delta_1 z|,$$
$$|\Delta_1 u - \Delta u| = |[f'(z + \Delta z) + \rho](\Delta_1 z - \Delta z)|,$$

R, R_1, ρ tendant vers zéro avec Δz, $\Delta_1 z$.

Les rapports des côtés correspondants sont donc respectivement $|f'(z) + R|$, $|f'(z) + R_1|$, $|f'(z + \Delta z) + \rho|$ et tendent vers la limite commune $f'(z)$ lorsque Δz et $\Delta_1 z$ tendent vers zéro. Les deux triangles tendent donc à devenir semblables.

Ce raisonnement serait toutefois en défaut pour les valeurs de z qui annuleraient $f'(z)$.

II. — Intégrales des fonctions synectiques.

193. Soit toujours

$$f(z) = P + iQ$$

une fonction de z, synectique à l'intérieur d'un domaine E, et soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations d'une ligne rectifiable L menée dans l'intérieur de E entre deux points z_0 et Z.

Les quantités P et Q étant des fonctions continues de x, y, qui, sur la ligne L, sont eux-mêmes des fonctions continues de t, seront le long de cette ligne des fonctions continues de t. Représentons-les par $P(t)$ et $Q(t)$.

Entre les valeurs t_0, T de t qui correspondent aux deux extrémités de L, intercalons une suite de valeurs intermédiaires $t_1, \ldots, t_k, \ldots$. Entre deux valeurs consécutives t_k, t_{k+1} prenons arbitrairement une valeur intermédiaire τ_k. Désignons par z_k, z_{k+1}, ζ_k les valeurs de z qui correspondent à t_k, t_{k+1}, τ_k.

Cela posé, formons la somme

$$S = \Sigma f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \Sigma[P(\tau_k) + iQ(\tau_k)](z_{k+1} - z_k).$$

Si l'on fait décroître indéfiniment l'étendue de tous les intervalles $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, *la somme ci-dessus tendra vers une limite fixe,* que nous appellerons l'*intégrale de* $f(z)\,dz$ *suivant la ligne* L, et que nous représenterons par

$$\int_L f(z)\,dz.$$

Pour établir ce théorème fondamental, il suffit de montrer que, quelle que soit la quantité ε, on pourra déterminer une quantité η telle que la différence entre deux sommes quelconques S et S′ dans chacune desquelles les intervalles Δt_k sont $< \eta$ ait son module nécessairement $< \varepsilon$.

Soient S, S′ deux de ces sommes correspondant respectivement à deux systèmes de valeurs intermédiaires $\ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots$ et $\ldots, t'_k, t'_{k+1}, \ldots$; S″ une troisième somme correspondant à un nouveau mode de division où figurent toutes les valeurs intermédiaires t et t'. On aura

$$|S' - S| \leqq |S'' - S| + |S'' - S'|;$$

il suffit donc de montrer que, si η est assez petit, le module de la différence $S'' - S$ sera $< \frac{\varepsilon}{2}$, la même démonstration s'appliquant à la différence analogue $S'' - S'$.

Considérons un terme

$$[P(\tau_k) + iQ(\tau_k)](z_{k+1} - z_k)$$

de la somme S. Il est remplacé dans S″ par une somme de termes

$$\Sigma[P(\tau'_{k'}) + i\,Q(\tau'_{k'})](z'_{k'+1} - z'_{k'})$$

où

$$\Sigma(z'_{k'+1} - z'_{k'}) = z_{k+1} - z_k.$$

La différence entre cette somme de termes et le terme primitif sera donc

$$(1)\qquad \Sigma\big\{P(\tau'_{k'}) - P(\tau_k) + i[Q(\tau'_{k'}) - Q(\tau_k)]\big\}(z'_{k'+1} - z'_{k'}).$$

Cela posé, τ_k et $\tau'_{k'}$ étant compris entre t_k et t_{k+1}, leur différence sera $< \eta$. D'ailleurs, les fonctions P et Q, étant continues, le sont uniformément. On pourra donc, en prenant η assez petit, rendre toutes les quantités $P(\tau'_{k'}) - P(\tau_k)$, $Q(\tau'_{k'}) - Q(\tau_k)$ moindres en valeur absolue qu'une quantité arbitraire ξ.

Cela posé, le module de la somme (1) sera moindre que

$$\xi\sqrt{2}\,\Sigma\,|z'_{k'+1} - z'_k|.$$

D'ailleurs $|z'_{k'+1} - z'_k|$ n'est autre chose que la distance rectiligne des points $z'_{k'+1}$ et $z'_{k'}$. Donc $\Sigma|z'_{k'+1} - z'_{k'}|$ représente le périmètre du polygone formé avec les points $z'_{k'}, \ldots$ et sera au plus égal à l'arc de courbe compris entre z_k et z_{k+1}.

Opérant de même sur chacun des termes de la somme S et sur les termes correspondants de S″, on aura

$$|S'' - S| < \xi\sqrt{2}\,l,$$

l désignant la longueur de l'arc total. En prenant ξ assez petit, on pourra rendre cette différence moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

194. Supposons, en outre, que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent une dérivée continue. Le calcul de l'intégrale dont l'existence vient d'être établie se ramènera à celui d'intégrales réelles.

Il s'agit, en effet, de trouver la limite de la somme

$$\Sigma(P + Qi)(\Delta x + i\,\Delta y) = \Sigma(P\,\Delta x - Q\,\Delta y) + i\,\Sigma(Q\,\Delta x + P\,\Delta y).$$

Or on a, d'après les hypothèses faites sur les fonctions φ et ψ,

$$\Delta x = [\varphi'(t) + R]\,\Delta t, \qquad \Delta y = [\psi'(t) + R']\,\Delta t,$$

R et R' convergeant uniformément vers zéro avec Δt, dans l'intervalle de t_0 à T.

On aura donc

$$\Sigma(P\,\Delta x - Q\,\Delta y) = \Sigma[P\,\varphi'(t) - Q\,\psi'(t)]\,\Delta t + \Sigma(PR - QR')\,\Delta t.$$

Le second terme de cette expression tend vers zéro avec les intervalles Δt. En effet, soient M une limite supérieure des modules des fonctions P et Q sur la ligne L; η le maximum des modules des quantités R, R'; on aura

$$\operatorname{mod}\Sigma(PR - QR')\,\Delta t \leqq 2M\eta\,\Sigma\,\Delta t \leqq 2M\eta(T - t_0).$$

Or, lorsque les Δt décroissent indéfiniment, les R, R' tendent uniformément vers zéro; donc η tend vers zéro.

On aura donc

$$\begin{aligned}\lim\Sigma(P\,\Delta x - Q\,\Delta y) &= \lim\Sigma[P\,\varphi'(t) - Q\,\psi'(t)]\,\Delta t\\ &= \int_{t_0}^{T}[P\,\varphi'(t) - Q\,\psi'(t)]\,dt.\end{aligned}$$

De même

$$\lim\Sigma(Q\,\Delta x + P\,\Delta y) = \int_{t_0}^{T}[Q\,\varphi'(t) + P\,\psi'(t)]\,dt.$$

195. De la définition de l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ par une limite de somme résultent évidemment les propriétés suivantes :

1° Si la ligne L est formée de plusieurs parties successives L_1, L_2, ..., on aura

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \ldots.$$

2° Si L et L^{-1} représentent la même ligne, décrite dans

deux sens opposés, on aura

$$\int_{L^{-1}} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz.$$

3° Si $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \dots$, c_1, c_2, ... étant des constantes, on aura

$$\int_L f(z)\,dz = c_1 \int_L f_1(z)\,dz + c_2 \int_L f_2(z)\,dz + \dots.$$

4° Enfin, soient M le maximum de $|f(z)|$ sur la ligne L, et l la longueur de cette ligne, on aura

$$|\Sigma f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)| \overline{\leq} \mathrm{M}\,\Sigma\,|z_{k+1} - z_k| \overline{\leq} \mathrm{M}p,$$

p désignant le périmètre du polygone $z_0 z_1 \dots z_k \dots$; d'où, en passant à la limite

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \overline{\leq} \mathrm{M}\,l.$$

196. On remarquera que, dans les raisonnements qui précèdent, nous nous sommes appuyé uniquement sur la continuité des fonctions P et Q, sans faire aucun usage des équations aux dérivées partielles qui expriment que $\mathrm{P} + \mathrm{Q}i$ a une dérivée déterminée. Mais ces nouvelles conditions vont intervenir dans la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* C *un contour fermé continu et sans point multiple, et tel que tous les points non extérieurs à* C *soient intérieurs au domaine* E. *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise suivant une ligne rectifiable fermée quelconque* K *intérieure à* C *sera identiquement nulle.*

La fonction $f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$, étant continue pour tous les points non extérieurs à C, qui forment un ensemble parfait, le sera uniformément dans cet ensemble.

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de la courbe K. Donnons à t une série de

valeurs successives $t_0, \ldots, t_k, \ldots$; nous obtiendrons sur la courbe une série de points correspondants $z_0, \ldots, z_k, \ldots$. Supposons que les intervalles $t_{k+1} - t_k$ soient tous $< \delta$. En faisant décroître suffisamment cette quantité δ, on pourra faire en sorte :

1° Que les distances $z_k z_{k+1}$ (qui tendent uniformément vers zéro avec δ) soient moindres que la plus courte distance de K à C, et par suite que le polygone inscrit P, qui a pour sommets $z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots$, soit intérieur à C;

2° Que la différence entre la somme

$$\Sigma f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

et sa limite $\int_K f(z)\,dz$ ait son module moindre qu'une quantité ε choisie à volonté;

3° Enfin, que la différence entre cette somme et l'intégrale $\int_P f(z)\,dz$, prise sur le contour du polygone P, ait aussi son module $< \varepsilon$.

Pour établir ce dernier point, qui seul a besoin de démonstration, considérons le terme

$$f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

correspondant à l'élément $z_k z_{k+1}$. Il est remplacé, dans l'intégrale $\int_P f(z)\,dz$, par l'expression suivante

$$\lim \Sigma f(z'_{ik})(z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

où $z'_{ik}, \ldots$ sont des points de division infiniment voisins pris sur la droite $z_k z_{k+1}$.

Comme on a

$$z_{k+1} - z_k = \Sigma(z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

la différence entre ces deux expressions sera la limite de la somme

$$\Sigma[f(z'_{ik}) - f(z_k)](z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

dont le module est au plus égal à

$$M_k \Sigma \mid z'_{i+1,k} - z'_{ik} \mid = M_k \mid z_{k+1} - z_k \mid = M_k l_k,$$

l_k désignant la longueur du côté $z_{k+1} - z_k$, et M_k le maximum des modules des quantités $f(z'_{ik}) - f(z_k)$.

Raisonnant de même sur chacun des côtés du polygone et désignant par M le maximum des quantités M_k et par l la longueur de la courbe K, on aura pour limite supérieure du module de la différence cherchée

$$\Sigma M_k l_k \leqq M \Sigma l_k \leqq M l.$$

D'ailleurs, le point z'_{ik} étant situé sur la droite $z_k z_{k+1}$, on aura

$$\mid z'_{ik} - z_k \mid \leqq \mid z_{k+1} - z_k \mid.$$

Donc les différences $z'_{ik} - z_k$ et, par suite, les quantités $f(z'_{ik}) - f(z_k)$ tendent uniformément vers zéro avec δ. On peut donc, en prenant δ assez petit, rendre M moindre que $\frac{\varepsilon}{l}$, ce qui démontre notre proposition.

Si donc nous établissons que l'intégrale $\int f(z)\,dz$ est nulle pour tout polygone P, le théorème sera démontré, car le module de l'intégrale $\int_K f(z)\,dz$ étant $< 2\varepsilon$, quelque petit que soit ε, sera rigoureusement nul.

197. Le contour polygonal P peut se traverser lui-même en certains points; le nombre de ces traversées sera limité et au plus égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, n étant le nombre des côtés du polygone. Partons, dans ce cas, d'un point quelconque du contour pour le décrire dans le sens de l'intégration, jusqu'à ce qu'on traverse pour la première fois les parties déjà décrites. La portion de contour comprise entre ces deux passages au même point formera un contour partiel qui ne se traverse pas

lui-même. Si l'on suppose le théorème établi pour un semblable contour, on pourra négliger cette portion de la ligne d'intégration, et il ne restera plus qu'à faire la démonstration pour le contour restant, où le nombre des traversées est diminué.

On voit donc qu'il suffit d'établir notre proposition pour un contour polygonal qui ne se traverse pas lui-même. Or l'intérieur d'un semblable contour peut se décomposer en triangles. Supposons le théorème établi pour chacun de ces triangles; la somme des intégrales obtenues en faisant le tour de chacun de ces triangles, dans le sens direct, par exemple, sera nulle. Mais les côtés de ces triangles qui ne font pas partie du contour P étant décrits deux fois en sens contraire, les intégrales correspondantes se détruisent deux à deux; et l'intégrale restante sera précisément celle qu'on obtient en décrivant le contour P.

Nous avons ainsi ramené la démonstration du théorème au cas où le contour K, au lieu d'être une courbe rectifiable quelconque, dont la notion est un peu confuse, se réduit à un triangle.

On peut même admettre que le triangle a un de ses côtés parallèles à l'axe des y, car tout triangle peut être décomposé en deux triangles de cette nature.

198. Considérons un semblable triangle ABC (*fig.* 1). Soient

$$\begin{aligned} A &= a + a'i, \\ B &= b + [a' + m_0(b-a)]\,i, \\ C &= b + [a' + m(b-a)]\,i \end{aligned}$$

les affixes de ses sommets (de telle sorte que m_0, m représentent respectivement les coefficients angulaires des côtés AB, BC).

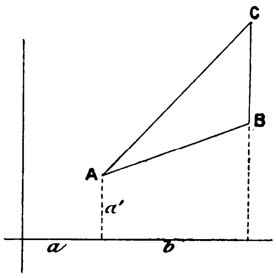
Nous allons montrer que l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise sur le contour du triangle, a une valeur indépendante de m.

Elle se compose, en effet, des trois intégrales

$$\int_{AB} f(z)\,dz,\quad \int_{BC} f(z)\,dz,\quad \int_{CA} f(z)\,dz.$$

La première ne dépend pas de m.

Fig. 1.



Cherchons la dérivée de la seconde. Soit

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y).$$

La ligne BC a pour équations

$$x = b, \qquad y = a' + t(b - a),$$

t étant réel et variant de m_0 à m. Donc l'intégrale

$$\int_{BC} f(z)\,dz$$

sera égale à

$$\int_{m_0}^{m} \{ P[b, a' + t(b - a)] + i\,Q[b, a' + t(b - a)] \}\, i(b - a)\,dt,$$

et sa dérivée, par rapport à sa limite supérieure m, sera

$$\begin{aligned} &P[b, a' + m(b - a)] + i\,Q[b, a' + m(b - a)]\, i(b - a) \\ &\quad = i f(C)(b - a). \end{aligned}$$

Cherchons, d'autre part, la dérivée de la troisième inté-

grale prise suivant le côté CA. On a, sur cette ligne,

$$x = t, \qquad y = a' + m(t - a),$$

t étant réel et variant de b à a. Substituant ces valeurs dans $f(z)$, on obtiendra un résultat de la forme

$$(2)\quad f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\,\mathrm{Q}(x, y) = \mathrm{P}_1(t, m) + i\,\mathrm{Q}_1(t, m),$$

et comme

$$dz = dx + i\,dy = (1 + mi)\,dt,$$

l'intégrale cherchée deviendra

$$\int_b^a [\mathrm{P}_1(t, m) + i\,\mathrm{Q}_1(t, m)]\,(1 + mi)\,dt,$$

expression où l'on séparerait sans peine la partie réelle de la partie imaginaire.

Sa dérivée par rapport à m sera

$$(3)\quad \int_b^a \left[\left(\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial m} + i\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial m}\right)(1 + mi) + (\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1 i)\,i\right]dt.$$

Or on a, par hypothèse,

$$i\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y},$$

et, d'autre part, en dérivant l'équation (2) par rapport aux variables indépendantes t, m dont x et y sont des fonctions,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + m\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial t} + i\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial t},$$

$$(t - a)\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial m} + i\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial m}.$$

La combinaison de ces équations donne

$$\left(\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial m} + i\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial m}\right)(1 + mi) = i(t - a)\left(\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial t} + i\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial t}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale (3), elle devient

$$\int_b^a i\left[(t-a)\left(\frac{\partial P_1}{\partial t}+i\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)+P_1+Q_1 i\right]dt$$

$$= i\int_b^a \frac{d}{dt}[(t-a)(P_1+Q_1 i)]\,dt = i[(t-a)(P_1+Q_1 i)]_b^a$$

$$= -i(b-a)f(C).$$

Cette dérivée étant égale et contraire à celle de l'intégrale suivant BC, on voit que l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise autour du triangle, est une constante indépendante de m.

Or, si $m = 0$, l'intégrale suivant BC disparaît, et les intégrales suivant AB et CA sont égales et contraires. Donc la constante est nulle et le théorème est établi.

199. Corollaire. — *Soient* L, L_1 *deux lignes arbitrairement tracées dans l'intérieur de* C *entre deux points fixes* z_0 *et* Z. *On aura*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz.$$

Car la ligne $L_1 L^{-1}$ étant fermée, on aura, d'après ce qui précède,

$$0 = \int_{L_1 L^{-1}} = \int_{L_1} + \int_{L^{-1}} = \int_{L_1} - \int_L.$$

L'intégrale ne dépend donc pas du tracé de la ligne L, mais seulement de la position de ses extrémités. On peut mettre ce fait en évidence en la représentant par la notation

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

200. Dans l'intérieur de C, cette expression représente une fonction synectique de Z, ayant pour dérivée $f(z)$.

Cherchons, en effet, son accroissement lorsqu'on change Z en $Z + dZ$.

Soit L la ligne d'intégration suivie de z_0 à Z. On peut

adopter comme ligne d'intégration de z_0 à $Z+dZ$ la ligne L, suivie de la droite infiniment petite qui joint Z à $Z+dZ$. On aura alors

$$\int_{z_0}^{Z+dZ} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$
$$= \int_{Z}^{Z+dZ} f(z)\,dz = f(Z)\int_{Z}^{Z+dZ} dz + \int_{Z}^{Z+dZ} [f(z)-f(Z)]\,dz.$$

Le premier terme est évidemment égal à $f(Z)\,dZ$. Le second a pour limite supérieure de son module $M\,|dZ|$, M étant le maximum de $|f(z)-f(Z)|$ sur la ligne d'intégration. Or $|z-Z|$ est $\overline{\overline{<}}\;|dZ|$, et $f(z)$ est continue. Si donc dZ tend vers zéro, il en sera de même de M; on aura donc

$$\int_{z_0}^{Z+dZ} - \int_{z_0}^{Z} = [f(Z)+R)\,dZ],$$

R étant un infiniment petit.

On voit par là qu'il existe des fonctions synectiques ayant $f(Z)$ pour dérivée et définies dans le même domaine que celle-ci; elles auront pour formule générale

$$\mathfrak{F}(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz + c,$$

c désignant une constante.

L'une de ces fonctions $\mathfrak{F}(Z)$ étant donnée, on obtiendra la valeur correspondante de c en faisant $Z=z_0$. Il vient

$$\mathfrak{F}(z_0) = c.$$

On aura, par suite, comme au n° **82**,

$$(4)\qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \mathfrak{F}(Z) - \mathfrak{F}(z_0).$$

Comme on a évidemment

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz,$$

l'intégrale, considérée comme fonction de z_0, aura pour dérivée $-f(z_0)$.

201. Les règles pour la dérivation des intégrales définies et pour l'intégration par parties (nos 83 et 84) s'appliquent évidemment aux intégrales que nous considérons en ce moment.

202. Le changement de la variable indépendante peut s'opérer comme il suit :

Soit $z=\varphi(t)$ une fonction de t, synectique à l'intérieur d'un domaine E_1. Lorsque t se meut à l'intérieur de E_1, z se mouvra dans un domaine correspondant E.

Supposons en particulier que t décrive un arc L_1 de ligne rectifiable; z décrira une ligne correspondante L, et ses variations seront liées à celles de t par la relation

$$\Delta z=(\varphi' t+\mathrm{R})\Delta t,$$

$\varphi' t$ restant continue, et R tendant uniformément vers zéro avec Δt; car les points de L_1 forment un ensemble borné et parfait; on pourra donc assigner une quantité η telle que, si $|\Delta t|<\eta$, $|\mathrm{R}|$ devienne moindre qu'une quantité ε arbitrairement choisie, quelle que soit la position du point t sur L_1. D'autre part, le long de cette ligne, $|\varphi'(t)|$ admettra un maximum μ.

Soit $t_0, \ldots, t_k, \ldots$ T une suite de points pris sur L_1, de telle sorte que les différences $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$ aient leurs modules moindres que η; et soient $z_0, \ldots, z_k, \ldots$, Z les points correspondants de L; on aura

$$\Delta z_k=[\varphi'(t_k)+\mathrm{R}_k]\,\Delta t_k,$$

d'où

$$|\Delta z_k| \overline{\gtrless} (\mu+\varepsilon)\,|\Delta t_k|;$$

donc les Δz_k tendront uniformément vers zéro avec les Δt_k.

Enfin la ligne L sera rectifiable et aura une longueur

$$l=\lim \Sigma\,|\Delta z_k| \overline{\gtrless} \lim(\mu+\varepsilon)\,\Sigma\,\Delta t_k \overline{\gtrless} \mu\, l_1,$$

l_1 désignant la longueur de L_1.

Cela posé, soit $f(z)$ une fonction de z, synectique dans E_1; on aura

$$\Sigma f(z_k)\,\Delta z_k = \Sigma f(\varphi t_k)\,(\varphi' t_k + R_k)\,\Delta t_k.$$

Faisons tendre η et ε vers zéro. Les Δt_k et les Δz_k tendant vers zéro, le premier membre aura pour limite

$$\int_L f(z)\,dz$$

et le second

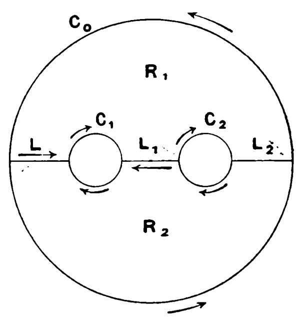
$$\int_{L_1} f(\varphi t)\varphi' t\,dt + \lim \Sigma f(\varphi t_k) R_k\,\Delta t_k.$$

Or, si l'on désigne par M le maximum de $|f|$ sur la ligne d'intégration, le second terme aura son module moindre que $M\varepsilon l_1$. Il tend donc vers zéro, et l'on aura

$$(5)\qquad \int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(\varphi t)\varphi' t\,dt.$$

203. THÉORÈME. — *Soient* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (*fig.* 2) *des contours fermés rectifiables et sans points multiples, extérieurs les uns aux autres, et tous intérieurs à un dernier contour* C_0 *de même nature.*

Fig. 2.



Soit, d'autre part, fz une fonction de z synectique dans un domaine E *contenant dans son intérieur toute la région* R *du plan bornée par les contours* $C_0, C_1, \ldots,$

C_n, y compris ces contours eux-mêmes; on aura

$$\int_{C_0} fz\,dz = \int_{C_1} fz\,dz + \ldots + \int_{C_n} fz\,dz,$$

les intégrales étant prises dans le même sens, par exemple dans le sens direct, autour de ces divers contours.

Nous supposerons $n = 2$ dans la démonstration.

Joignons les contours C_0, C_1, C_2 par des lignes rectifiables L, L_1, L_2 sans points multiples et ne se rencontrant pas mutuellement (*fig.* 2). La région R se trouvera divisée en deux régions partielles R_1, R_2, limitées chacune par un seul contour fermé dans tout l'intérieur duquel fz est synectique.

L'intégrale $\int fz\,dz$ prise dans le sens direct le long de chacun de ces contours frontières sera donc nulle (196). Ajoutant les résultats obtenus pour les deux régions, on remarque :

1° Que chacune des lignes L, L_1, L_2 ayant été décrite une fois dans chaque sens, les intégrales correspondantes se détruisent;

2° Que les deux moitiés du contour C_0 ont été décrites chacune dans le sens direct; la somme des intégrales obtenues sera donc

$$\int_{C_0} fz\,dz;$$

3° Que les deux moitiés de chacun des contours C_1, C_2 ont été décrites dans le sens rétrograde. Si donc nous désignons par $\int_{C_1} fz\,dz$, $\int_{C_2} fz\,dz$ les valeurs des intégrales prises en décrivant C_1 et C_2 dans le sens direct, les intégrales obtenues seront $-\int_{C_1} fz\,dz$, $-\int_{C_2} fz\,dz$. Nous avons donc comme résultat final

$$\int_{C_0} fz\,dz - \int_{C_1} fz\,dz - \int_{C_2} fz\,dz = 0.$$

204. Théorème. — *Soit fz une fonction synectique à l'intérieur d'un domaine* E; *soit* K *un contour (rectifiable, fermé et sans point multiple) et tel que toute la région du plan non extérieure à* K *soit dans l'intérieur de* E; *on aura pour tout point a de cette région*

$$fa = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{fz\,dz}{z-a}. \tag{6}$$

Soit, en effet, c un cercle de rayon infiniment petit r décrit du point a comme centre; on aura, d'après le théorème précédent

$$\int_K \frac{fz}{z-a}dz = \int_c \frac{fz}{z-a}dz = fa\int_c \frac{dz}{z-a} + \int_c \frac{fz-fa}{z-a}dz.$$

Le dernier terme tend vers zéro avec r. Soit, en effet, M le maximum de $|fz - fa|$ sur le cercle c; $|z-a|$ étant égal à r sur ce même cercle, le module de l'intégrale ne pourra surpasser $\frac{M}{r}2\pi r = 2\pi M$. Or, à cause de la continuité de $f(z)$, M tend vers zéro avec r.

D'autre part, on a sur le cercle

$$\begin{aligned} z &= a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\\ dz &= r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = (z-a)\,i\,d\varphi, \end{aligned}$$

φ étant réel et variant de 0 à 2π. On aura donc

$$\int_c \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

205. L'équation (6), dérivée par rapport au paramètre a, donnera les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} f'a &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{fz}{(z-a)^2}dz,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ f^n a &= \frac{1.2\dots n}{2\pi i}\int_K \frac{fz}{(z-a)^{n+1}}dz. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Les intégrales qui figurent au premier membre sont des fonctions de a finies et déterminées. Les dérivées successives de la fonction f sont donc synectiques, comme f elle-même, dans tout l'intérieur de K.

Soient

r la plus courte distance du point a au contour K;
M le maximum de $|fz|$ sur ce contour;
l sa longueur.

On aura, sur tout ce contour,

$$|z-a| \overline{\overline{>}} r$$

et, par suite,

$$|f^n a| \overline{\overline{<}} \frac{1.2\ldots n}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} l$$

et, en particulier, si K est un cercle ayant a pour centre, d'où $l = 2\pi r$,

$$(8) \qquad |f^n a| \overline{\overline{<}} \frac{1.2\ldots n.M}{r^n}.$$

206. Les résultats précédents s'étendent immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Soit, par exemple, $f(z, z_1)$ une fonction des deux variables complexes z, z_1, qui reste synectique tant que z, z_1 restent dans l'intérieur de domaines E, E_1. Soient K, K_1 deux contours fermés (rectifiables et sans point multiple), tels que tous les points des régions non extérieures à K et à K_1 soient intérieurs respectivement à E et à E_1; a, a_1 désignant deux points quelconques pris dans ces régions, on aura

$$f(a, a_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z, a_1)}{z-a}\,dz,$$

$$f(z, a_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1} \frac{f(z, z_1)}{z_1-a_1}\,dz_1,$$

d'où

$$(9) \qquad f(a, a_1) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_K \left[\int_{K_1} \frac{f(z, z_1)\,dz_1}{(z-a)(z_1-a_1)}\right] dz$$

et, en dérivant m fois par rapport à a et m_1 fois par rapport à a_1,

$$(10)\quad \frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} = \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots m_1}{(2\pi i)^2} \int_K \left[\int_{K_1} \frac{f(z, z_1)\, dz_1}{(z-a)^{m+1}(z_1-a_1)^{m_1+1}} \right.$$

Les dérivées partielles seront donc synectiques, et si l'on désigne par M le maximum de $|f(z, z_1)|$ pour tous les systèmes de valeurs de z, z_1 respectivement situées sur les contours K, K_1; par r, r_1 les distances de ces contours aux points a, a_1; par l, l_1 leurs longueurs, on aura

$$(11)\quad \left| \frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} \right| \leqq \frac{m!\, m_1!}{(2\pi)^2} \frac{M}{r^{m+1} r_1^{m_1+1}} ll_1.$$

En particulier, si K et K_1 sont des cercles de même rayon r, ayant leurs centres en a et a_1, il viendra

$$\left| \frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} \right| \leqq m!\, m_1!\, \frac{M}{r^{m+m_1}}.$$

III. — Fonctions rationnelles.

207. Polynomes entiers. — Considérons un polynôme

$$P(z) = A z^m + B z^{m-1} + \ldots + K,$$

où z est une variable complexe, A, B, ..., K des nombres complexes quelconques.

Cette expression a une valeur déterminée pour toute valeur de z.

D'ailleurs, si nous posons, pour abréger,

$$P'(z) = mA z^{m-1} + (m-1) B z^{m-2} + \ldots,$$
$$P''(z) = m(m-1) A z^{m-2} + (m-1)(m-2) B z^{m-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

nous aurons

$$P(z+h) = P(z) + h P'(z) + \frac{h^2}{1.2} P''(z) + \ldots,$$

d'où

$$\frac{P(z+h)-P(z)}{h}=P'(z)+\frac{h}{1.2}P''(z)+\ldots,$$

$$\lim_{h=0}\frac{P(z+h)-P(z)}{h}=P'(z).$$

Donc $P(z)$ est une fonction synectique ayant pour dérivée $P'(z)$.

Si $|z|$ tend vers ∞, il en sera de même de $|P(z)|$. On a, en effet,

$$P(z)=z^m\left(A+\frac{B}{z}+\ldots+\frac{K}{z^m}\right),$$

$$|P(z)|\geqq|z|^m\left(|A|-\frac{|B|}{|z|}-\ldots-\frac{|K|}{|z|^m}\right)$$

et, si l'on suppose $|z|>1$,

$$(z)|>|z|\left(|A|-\frac{|B|+\ldots+|K|}{|z|}\right)>|A|\,|z|-(|B|+\ldots+|K|).$$

Donc, ε désignant une quantité positive quelconque, $|P(z)|$ sera $>\varepsilon$ dès que $|z|$ sera $\geqq\delta$, δ désignant une constante plus grande que 1 et que $\dfrac{|B|+\ldots+|K|+\varepsilon}{|A|}$.

208. *L'équation* $P(z)=0$ *admet toujours au moins une racine.*

Donnons en effet à z une valeur quelconque c; soit ε la valeur correspondante de $|P(z)|$. La constante δ étant déterminée comme ci-dessus, considérons l'ensemble des valeurs de z dont les affixes ne sortent pas d'un cercle C de rayon δ, ayant pour centre l'origine des coordonnées.

Cet ensemble étant borné et parfait, $|P(z)|$, qui varie d'une manière continue avec z, y admettra un minimum m au plus égal à ε, qu'il atteindra effectivement pour une valeur déterminée a de z. Cette valeur sera intérieure au cercle C, car sur le cercle $|z|=\delta$ et $|P(z)|>\varepsilon$.

Nous allons démontrer que ce minimum est nécessaire-

ment nul. Supposons, en effet, qu'on eût

$$m = |P(a)| > 0.$$

Donnons à z une valeur $a+h$, h étant une quantité complexe assez petite pour que le point $a+h$ soit encore dans le cercle C; nous allons voir qu'on pourra déterminer h de telle sorte que $|P(a+h)|$ soit $< |P(a)|$, ce qui implique contradiction.

On a

$$P(a+h) = P(a) + h P'(a) + \ldots + h^m \frac{P^m(a)}{1.2\ldots m}.$$

Le terme en h^m dans ce développement a pour coefficient $\frac{P^m(a)}{1.2\ldots m} = A$, quantité différente de zéro. Mais les coefficients des autres puissances de h peuvent être nuls.

Supposons, pour fixer les idées, que le premier terme dont le coefficient ne soit pas nul soit le terme en h^λ. Notre développement prendra la forme

$$P(a+h) = P(a) + B_0 h^\lambda + B_1 h^{\lambda+1} + \ldots + B_{m-\lambda} h^m.$$

On en déduit

$$|P(a+h)| \overline{\gtrless} |P(a) + B_0 h^\lambda| + |B_1|\,|h|^{\lambda+1} + \ldots + |B_{m-\lambda}|\,|h|^m.$$

Prenons le module de h assez petit pour qu'on ait

$$|h| < 1, \qquad |B_0|\,|h|^\lambda < |P(a)|,$$

et déterminons son argument par la condition

$$\lambda \arg h + \arg B_0 = \arg P(a) + \pi.$$

Les deux quantités $P(a)$ et $B_0 h^\lambda$ ayant des arguments qui diffèrent de π, et $|P(a)|$ étant $> |B_0 h^\lambda|$, on aura

$$|P(a) + B_0 h^\lambda| = |P(a)| - |B_0|\,|h|^\lambda$$

et, par suite,

$$|P(a+h)| \overline{\gtrless} |P(a)| - |B_0|\,|h|^\lambda + |B_1|\,|h|^{\lambda+1} + \ldots,$$
$$|P(a+h)| - |P(a)| \overline{\gtrless} |h|^\lambda [-|B_0| + |B_1|\,|h| + \ldots].$$

Le facteur entre parenthèses tend, lorsque $|h|$ tend vers zéro, vers la quantité négative $-|B_0|$. Donc, en prenant $|h|$ suffisamment petit, on aura

$$|P(a+h)| - |P(a)| < 0.$$

Il est donc établi qu'on peut donner à z une valeur a, telle que l'on ait

$$|P(a)| = 0, \qquad \text{d'où} \qquad P(a) = 0.$$

209. Divisons $P(z)$ par le binôme $z-a$; il viendra

$$P(z) = (z-a)P_1(z) + R,$$

le quotient $P_1(z)$ étant un polynôme de degré $m-1$ et R une constante. Posant d'ailleurs dans cette identité $z=a$, elle devient

$$0 = R.$$

On aura donc, plus simplement,

$$P(z) = (z-a)P_1(z).$$

En opérant sur $P_1(z)$, comme sur le polynôme primitif, on le mettra de même sous la forme du produit d'un binôme $z-b$ par un polynôme $P_2(z)$ de degré $m-2$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une simple constante C. On aura finalement

$$P(z) = C(z-a)(z-b)\ldots.$$

D'ailleurs, en divisant les deux membres de cette égalité par z^m, puis faisant croître z indéfiniment, il viendra à la limite

$$A = C,$$

et par suite

$$P(z) = A(z-a)(z-b)\ldots.$$

Nous obtenons donc ce théorème fondamental :

Tout polynôme $P(z)$ *de degré* m *peut être mis sous la forme du produit de son premier coefficient* A *par* m *binômes du premier degré* $z-a$, $z-b$, ...

Sous cette forme, on voit immédiatement que les racines

de l'équation $P(z) = 0$ sont les quantités a, b, ... Elles sont au nombre de m si les facteurs $z - a$, $z - b$, ... sont différents. Si α d'entre eux sont égaux à $z - a$, on dira que a est une *racine multiple*, dont l'*ordre de multiplicité est* α. D'après cette convention, le nombre des racines, comptées chacune avec son ordre de multiplicité, est toujours égal à m.

210. Soient a, b, ... les racines distinctes de l'équation $P(z) = 0$; α, β, ... leurs degrés de multiplicité. On aura

$$P(z) = A(z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots$$

et, en dérivant,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \ldots,$$

$$\begin{aligned} P'(z) = {} & \alpha A(z-a)^{\alpha-1}(z-b)^\beta \ldots \\ & + \beta A(z-a)^\alpha (z-b)^{\beta-1} \ldots + \ldots. \end{aligned}$$

Tous les termes de cette expression sont divisibles par $(z-a)^\alpha$ sauf le premier, qui ne l'est que par $(z-a)^{\alpha-1}$. Donc la dérivée $P'(z)$ admet la racine a avec l'ordre de multiplicité $\alpha - 1$. De même, elle admettra b avec l'ordre de multiplicité $\beta - 1$, etc. Quant aux racines simples de $P(z)$, elles ne seront plus racines de $P'(z)$.

Soient donc P_1 le produit des binômes $z - a$ qui correspondent aux racines simples de l'équation $P = 0$; P_2 le produit des binômes correspondants aux racines doubles, etc., de telle sorte qu'on ait, à un facteur numérique près,

$$P = P_1 P_2^2 P_3^3 \ldots.$$

Le plus grand commun diviseur de P et de sa dérivée P' sera (à un facteur numérique près)

$$Q = P_2 P_3^2 \ldots.$$

Celui de Q et de sa dérivée Q' sera, de même,

$$R = P_3 \ldots.$$

On en déduit, par la division,

$$P_1 P_2 P_3 \ldots = \frac{P}{Q}, \qquad P_2 P_3 = \frac{Q}{R}, \qquad \ldots,$$

et, en divisant de nouveau chacune de ces expressions par la suivante, on obtiendra enfin P_1, P_2, P_3, ...

Ainsi P_1, P_2, P_3, ... peuvent s'obtenir par de simples divisions.

211. Fractions rationnelles. — On nomme *fonctions algébriques* celles qui sont liées à la variable indépendante par une équation de la forme $\Pi(u, z) = 0$, où Π est un polynôme entier; *fonctions transcendantes* celles qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les fonctions algébriques les plus simples, après les polynômes entiers, sont les *fractions rationnelles*, définies par une équation du premier degré en u

$$Qu - P = 0,$$

Q et P étant des polynômes en z, qu'on peut supposer sans facteur commun.

En résolvant cette équation, on obtiendra u sous la forme explicite

$$u = \frac{P}{Q}.$$

Cette expression a une valeur bien définie pour toute valeur de z, sauf lorsque z est racine de l'équation $Q = 0$.

Soient a l'une de ces racines; α son ordre de multiplicité. Si l'on fait tendre z vers a, $\left|\frac{P}{Q}\right|$ sera infinie d'ordre α.

La fraction $\frac{P}{Q}$ a une dérivée $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$ également bien définie pour toute valeur de z qui n'est pas racine de Q. Celle-ci a une dérivée de même nature; elle est donc continue. Ainsi $\frac{P}{Q}$ est une fonction synectique de z dans tout le plan, à l'exception des racines de $Q = 0$.

Si a est une racine de Q d'ordre de multiplicité α, Q sera divisible par $(x-a)^\alpha$, Q' par $(x-a)^{\alpha-1}$, et P sera premier à $x-a$. La dérivée $\frac{P'Q-Q'P}{Q^2}$, réduite à sa plus simple expression, contiendra donc $x-a$ en dénominateur à la puissance $\alpha+1$, et deviendra infinie d'ordre $\alpha+1$ pour $x=a$.

212. Supposons que Q ait été décomposé d'une manière quelconque en un produit de deux facteurs Q_1 et Q_2 premiers entre eux. On pourra déterminer deux polynômes M_1, M_2, tels que l'on ait

$$M_1 Q_1 + M_2 Q_2 = 1$$

et, par suite,

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P(M_1 Q_1 + M_2 Q_2)}{Q_1 Q_2} = \frac{PM_1}{Q_1} + \frac{PM_2}{Q_2}.$$

La fraction $\frac{P}{Q}$ est donc la somme de deux autres, ayant respectivement pour dénominateurs Q_1 et Q_2.

Si l'un des facteurs Q_1, Q_2 était lui-même un produit de deux facteurs premiers entre eux, on pourrait décomposer de nouveau la fraction partielle correspondante en une somme de deux autres fractions, et ainsi de suite.

213. On donne le nom de *fraction simple* à une fraction dont le numérateur est une constante et le dénominateur une puissance μ d'un binôme $x-a$.

On déduit aisément des remarques qui précèdent cette proposition fondamentale :

Toute fraction $\frac{P}{Q}$ peut être décomposée en une somme de fractions simples, augmentée d'un polynôme entier.

Nous pouvons tout d'abord supposer que le coefficient de la plus haute puissance de z dans Q se réduise à l'unité; car on n'altère pas la valeur de la fraction en divisant simultanément P et Q par ce coefficient.

Cela posé, décomposons Q en ses facteurs du premier degré ; soit

$$Q = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta \ldots.$$

Les facteurs $(z-a)^\alpha$, $(z-b)^\beta$, ... étant premiers entre eux, on aura, d'après les propositions précédentes,

$$\frac{P}{Q} = \frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} + \frac{G(z)}{(z-b)^\beta} + \ldots,$$

F, G, ... étant des polynômes entiers.

Considérons l'une des fractions partielles, telle que $\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha}$.

Posons

$$z = a + h :$$

$F(z)$ développé suivant les puissances de h prendra la forme

$$A_\alpha + A_{\alpha-1}h + \ldots + Ah^{\alpha-1} + h^\alpha \Phi(h),$$

$\Phi(h)$ étant un polynôme entier.

On aura, par suite,

$$\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A}{h} + \Phi(h),$$

et, en remettant pour h sa valeur $z - a$,

$$\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A}{z-a} + \Phi(z-a),$$

c'est-à-dire une somme de fractions simples, plus un polynôme entier.

Opérant de même sur chacune des fractions partielles, il viendra finalement

$$(1) \qquad \frac{P}{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_1}{z-a} + \ldots + \dfrac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ + \dfrac{B_1}{z-b} + \ldots + \dfrac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} + \Psi(z),$$

$\Psi(z)$ étant un polynôme entier.

Le degré de ce polynôme Ψ est aisé à calculer *a priori*. Supposons, en effet, que Q soit de degré m et P de degré $m+\mu$. Si $|z|$ tend vers ∞, $\frac{P}{Q}$ tendra aussi vers ∞ et sera infini d'ordre μ. Il doit en être de même du second membre. Mais les fractions qu'il contient tendent vers zéro. Donc Ψ doit être un infini d'ordre μ. Donc μ est le degré du polynôme.

On verrait de même que Ψ doit se réduire à une constante si P est de même degré que Q, et disparaître complètement, si P est de moindre degré que Q.

Connaissant ainsi le degré du polynôme Ψ, il sera facile de déterminer ses coefficients, ainsi que les constantes A, B, ... Il suffira, après avoir chassé les dénominateurs dans l'équation (1), d'identifier les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. On obtiendra ainsi un système d'équations linéaires pour déterminer les coefficients inconnus.

214. Il est souvent préférable d'employer le procédé suivant, qui a l'avantage de montrer que la décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

Posons $z = a + h$ dans l'équation (1); il viendra

$$P(a+h) = P(a) + h\,P'(a) + \ldots,$$

$$Q(a+h) = Q^{\alpha}(a)\frac{h^{\alpha}}{1.2\ldots\alpha} + Q^{\alpha+1}(a)\frac{h^{\alpha+1}}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots.$$

Effectuons la division de ces deux polynômes ainsi ordonnés suivant les puissances croissantes de h, et arrêtons-nous au moment où nous aurions à écrire au quotient des termes ne contenant plus h en dénominateur. Nous aurons ainsi

$$\frac{P(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{\mathcal{A}_{\alpha}}{h^{\alpha}} + \ldots + \frac{\mathcal{A}_1}{h} + \frac{R\,h^{\alpha}}{Q(a+h)},$$

$\mathcal{A}_{\alpha}$, $\mathcal{A}_1$, ... étant des constantes et R un polynôme entier.

Le second membre de l'équation (1) devient, par la même substitution,

$$\frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{B_1}{a-b+h} + \ldots + \Psi(a+h).$$

Nous avons donc identiquement

$$\begin{aligned}&\frac{\mathcal{A}_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{\mathcal{A}_1}{h} + \frac{R h^\alpha}{Q(a+h)}\\ &\quad = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{B_1}{a-b+h} + \ldots + \Psi(a+h).\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par h^α, puis faisons $h = 0$. Il viendra $\mathcal{A}_\alpha = A_\alpha$.

Supprimons les deux termes égaux $\frac{\mathcal{A}_\alpha}{h^\alpha}$ et $\frac{A_\alpha}{h^\alpha}$, multiplions par $h^{\alpha-1}$ et faisons $h = 0$; il viendra $\mathcal{A}_{\alpha-1} = A_{\alpha-1}, \ldots$.

Les coefficients $A_\alpha, \ldots, A_1$ sont donc déterminés sans ambiguïté par les relations

$$A_\alpha = \mathcal{A}_\alpha, \qquad \ldots, \qquad A_1 = \mathcal{A}_1.$$

On calculera de même les coefficients $B_1, \ldots, B_\beta$ relatifs à une seconde racine b, et ainsi de suite.

Reste à calculer le polynôme entier $\Psi(z)$, dont on connaît déjà le degré μ.

Soient

$$\begin{aligned}P &= M z^{m+\mu} + M_1 z^{m+\mu-1} + \ldots,\\ Q &= N z^m \quad + N z^{m-1} \quad + \ldots.\end{aligned}$$

On trouve par la division

$$\frac{P}{Q} = \rho z^\mu + \rho_1 z^{\mu-1} + \ldots + \rho_\mu + R,$$

ρ, ρ_1, ... étant des constantes et R s'annulant pour $z = \infty$. Soit d'autre part

$$\Psi(z) = s z^\mu + s_1 z^{\mu-1} + \ldots + s_\mu.$$

On aura l'identité

$$\begin{aligned}&\rho z^\mu + \ldots + \rho_\mu + R\\ &= \frac{A_1}{z-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{B_1}{z-b} + \ldots + s z^\mu + \ldots + s_\mu.\end{aligned}$$

Divisant par z^μ et faisant $z = \infty$, il viendra $\rho = s$. Supprimant les deux termes égaux ρz^μ, $s z^\mu$, divisant par $z^{\mu-1}$ et faisant $z = \infty$, il viendra $\rho_1 = s_1$, ...

215. Supposons, en particulier, que $Q(z)$ n'ait que des racines simples, et soit de degré m, $P(z)$ étant de degré $< m$. Soit a l'une des racines de Q; on aura

$$\frac{P(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{P(a)+\ldots}{Q'(a)h+\ldots} = \frac{P(a)}{Q'(a)}\frac{1}{h} + \ldots.$$

En second lieu, le polynôme $\Psi(z)$ n'existera pas. La formule de décomposition sera donc

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum \frac{P(a)}{Q'(a)} \frac{1}{z-a},$$

la sommation s'étendant aux diverses racines a de $Q(z)$.

Multiplions cette équation par z et faisons $z = \infty$;

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

ayant pour limite l'unité, il viendra

$$\sum \frac{P(a)}{Q'(a)} = \lim_{z=\infty} \frac{z\,P(z)}{Q(z)}.$$

Si $P(z)$ est de degré $m-1$, le second membre a pour limite $\frac{M}{N}$, M et N étant les premiers coefficients de $P(z)$ et de $Q(z)$.

Si, au contraire, le degré de $P(z)$ est $< m-1$, la limite sera nulle, et l'on aura

$$\sum \frac{P(a)}{Q'(a)} = 0.$$

IV. — Fonctions algébriques.

216. Passons à l'étude des *fonctions algébriques,* définies par une équation de la forme

$$(1)\qquad f(u, z) = \mathrm{M}\, u^n + \mathrm{M}_1 u^{n-1} + \ldots + \mathrm{M}_n = 0,$$

où $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ sont des polynômes entiers en z.

Nous pouvons supposer le polynôme $f(u, z)$ *irréductible,* c'est-à-dire non décomposable en un produit de facteurs de même nature; car, s'il était réductible, on n'aurait qu'à étudier séparément les équations obtenues en égalant chaque facteur à zéro.

Pour chaque valeur particulière de z, l'équation (1) donnera, en général pour u, n valeurs distinctes $u_1, \ldots, u_n$. Ce résultat souffre toutefois deux exceptions :

1° Si z est racine de l'équation $\mathrm{M} = 0$, le degré de l'équation en u s'abaisse au-dessous de n, et une ou plusieurs racines disparaissent.

2° L'équation (1) peut avoir des racines égales. Dans ce cas, le produit

$$(2)\qquad \mathrm{N} = \Pi\, \mathrm{M}^2 (u_i - u_k)^2$$

est égal à zéro. Or ce produit, étant symétrique par rapport aux quantités $\mathrm{M}u_1, \mathrm{M}u_2, \ldots,$ est un polynôme entier en z.

L'équation $f = 0$ admettra donc n racines distinctes, sauf pour les valeurs de z qui satisfont à l'une des équations

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = 0.$$

Ces valeurs exceptionnelles, en nombre limité, ont reçu le nom de *points critiques*. Les autres valeurs de z sont des *points ordinaires*.

217. Soit C un contour continu, fermé, sans point multiple, et laissant à son extérieur tous les points critiques. Les points non extérieurs à C forment un domaine E, d'un seul

tenant; et si z est assujetti à rester dans ce domaine, à chacune de ses valeurs correspondront n racines $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation $f = 0$.

Nous allons montrer tout d'abord que, dans ces conditions : 1° les modules $|u_1|, \ldots, |u_n|$ ne peuvent surpasser un nombre fixe μ; 2° les modules $|u_1 - u_2|, \ldots, |u_i - u_k|$ ne peuvent être inférieurs à un autre nombre fixe ν, plus grand que zéro; 3° les modules des rapports

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} : \frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i}$$

ne peuvent surpasser un nombre fixe ϖ.

Soit, en effet, a le maximum de $|z|$ dans le domaine E. Tout polynôme entier en z, tel que $\Sigma A z^\alpha$, aura son module au plus égal à la quantité fixe

$$\Sigma |A| a^\alpha.$$

En particulier, N, M, $M_1, \ldots, \frac{dM}{dz}, \frac{dM_1}{dz}, \cdots$ sont des polynômes de ce genre; donc $|N|, |M|, |M_1|, \ldots, \left|\frac{dM}{dz}\right|, \left|\frac{dM_1}{dz}\right|, \cdots$ admettent des bornes supérieures que l'on peut assigner; soit b la plus grande d'entre elles.

D'autre part, M est de la forme

$$A(z - z_1) \ldots (z - z_p),$$

où $z_1, \ldots, z_p$ sont des points critiques. Si δ désigne la distance du contour C au point critique le plus voisin, chacun des modules $|z - z_1|, \ldots, |z - z_p|$ sera au moins égal à δ en chaque point de E; donc $|M|$ ne peut s'abaisser au-dessous du nombre fixe $|A|\delta^p$, que nous désignerons par c.

On trouvera de même pour $|N|$ une borne inférieure c'.

Cela posé, soit μ la plus grande des deux quantités $1, \frac{nb}{c}$; on aura, pour toutes les valeurs considérées de z et pour

toute valeur v de la variable u dont le module surpasse μ

$$\begin{aligned} |f(v,z)| &\overline{\overline{>}} |\mathrm{M}|\,|v|^n - |\mathrm{M}_1|\,|v|^{n-1} - \ldots - |\mathrm{M}_n| \\ &\overline{\overline{>}} \quad c\,|v|^n - \quad b(|v|^{n-1} + |v|^{n-2} + \ldots + 1) \\ &> \quad c\,|v|^n - \quad nb\,|v|^{n-1} \overline{\overline{>}} c\,|v|^{n-1}(|v| - \mu) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi v ne peut satisfaire à l'équation $f = 0$. Donc, les modules des racines $|u_1|, \ldots, |u_n|$ ont μ pour borne supérieure commune.

Les quantités $|u_1 - u_2|, \ldots, |u_i - u_k|$ auront donc pour borne supérieure 2μ. L'équation (2) donne d'ailleurs

$$|\mathrm{N}| = \Pi\,|\mathrm{M}|^2\,|u_i - u_k|^2,$$

d'où, en remplaçant $|\mathrm{N}|$ par sa borne inférieure c', et tous les facteurs du second membre, sauf l'un d'eux $|u_i - u_k|$, par leurs bornes supérieures

$$c' \overline{\overline{<}} b^{n(n-1)}(2\mu)^{n(n-1)-2}\,|u_i - u_k|^2.$$

Donc $|u_i - u_k|$ a pour borne inférieure la quantité

$$\nu = \frac{2\mu\sqrt{c'}}{(2\mu b)^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Quant à la dérivée partielle

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} = \frac{d\mathrm{M}}{dz} u_i^n + \frac{d\mathrm{M}_1}{dz} u_i^{n-1} + \ldots,$$

elle a pour borne supérieure de son module la quantité

$$b\mu^n + b\mu^{n-1} + \ldots.$$

On a enfin

$$f(u, z) = \mathrm{M}(u - u_1)\ldots(u - u_n).$$

Prenant la dérivée partielle par rapport à u et posant ensuite $u = u_i$, il viendra

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i} = \mathrm{M}(u_i - u_1)\ldots(u_i - u_n),$$

expression dont le module a pour borne inférieure

$$c\nu^{n-1}.$$

Le module du quotient

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} : \frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i}$$

a donc pour borne supérieure la quantité

$$\varpi = \frac{b\mu^n + b\mu^{n-1} + \dots}{c\nu^{n-1}}.$$

218. Ces préliminaires posés, choisissons, à volonté, pour chacune des valeurs de la quantité complexe $z = x + yi$, une des n racines de $f = 0$. L'ensemble des racines ainsi choisies sera une fonction U des variables x, y.

Cherchons à diriger notre choix de telle sorte que cette fonction soit continue.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Si deux fonctions U_1, U_2, *déterminées comme ci-dessus, sont continues dans tout le domaine* E, *et ne sont pas identiques, elles ne seront égales en aucun point de* E.

En effet, d'après nos hypothèses, $|U_1 - U_2|$ sera une fonction continue de x, y. D'ailleurs, en chaque point z de E, U_1 et U_2 sont des racines de l'équation $f(u, z) = 0$. Si ces deux racines sont identiques, on aura

$$|U_1 - U_2| = 0.$$

Si elles sont différentes, on aura au contraire

$$|U_1 - U_2| \geqq \nu.$$

Puisque U_1 et U_2 ne sont pas identiques, il existera au moins une valeur de z pour laquelle le second cas se présentera. D'ailleurs, les valeurs de $|U_1 - U_2|$ doivent former un ensemble d'un seul tenant (64). Donc $|U_1 - U_2|$, ne pouvant prendre les valeurs intermédiaires entre ν et 0, ne pourra s'annuler.

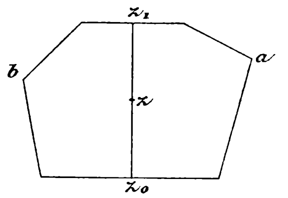
Le nombre des fonctions continues distinctes que l'on peut former ne saurait donc surpasser le nombre n des racines de l'équation $f = 0$, et s'il existe n semblables fonctions $U_1, \ldots, U_n$, les valeurs de ces fonctions, étant constamment différentes entre elles, reproduiront, pour chaque valeur de z, la suite complète des racines de cette équation.

219. Nous allons montrer réciproquement qu'on peut grouper ensemble les valeurs de u correspondant aux divers points de E de manière à constituer n fonctions continues distinctes $U_1, \ldots, U_n$.

Dans la démonstration de cette proposition, il nous sera permis de supposer que C est un contour polygonal. En effet, nous savons qu'on peut déterminer un contour polygonal $\mathfrak{P}$, sans point multiple, contenant C dans son intérieur et dont tous les points soient à une distance de C moindre que δ. Tous les points critiques seront encore extérieurs à ce contour $\mathfrak{P}$. Or, si le théorème est vrai pour le contour $\mathfrak{P}$, il le sera évidemment pour le contour intérieur C.

Si le théorème est vrai pour deux contours polygonaux $\mathfrak{P}' = z_0 a z_1 z_0$, $\mathfrak{P}'' = z_0 z_1 b z_0$ ayant un côté commun $z_0 z_1$ (*fig.* 3), il le sera pour le contour polygonal $\mathfrak{P} = z_0 a z_1 b z_0$ résultant de la réunion de leurs autres parties.

Fig. 3.



Soient, en effet, $U'_1, \ldots, U'_n$ les n fonctions U relatives au contour $\mathfrak{P}'$; $U''_1, \ldots, U''_n$ les n fonctions relatives à $\mathfrak{P}''$. Posons

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad z_1 = x_1 + iy_1.$$

Un point z situé sur la ligne $z_0 z_1$ aura pour coordonnées

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \qquad y = y_0 + (y_1 - y_0)t,$$

t désignant le rapport des distances zz_0 et $z_1 z_0$.

Si le point $z = x + iy$ décrit la ligne $z_0 z$, t variera de o à 1, et x, y seront des fonctions continues de t.

Les valeurs des diverses fonctions $U'_1, \ldots, U'_n$ au point z_0 sont les diverses racines $u_1^0, \ldots, u_n^0$ de l'équation

$$f(u, z_0) = 0.$$

Il en est de même pour les fonctions $U''_1, \ldots, U''_n$. On pourra associer une à une ces fonctions aux précédentes, en joignant ensemble celles qui prennent la même valeur en z_0.

Soient, par exemple, U'_i et U''_i les deux fonctions qui prennent la valeur u_i^0. Ces deux fonctions seront égales le long de la ligne $z_0 z_1$.

En effet, U'_i est continu par rapport à x, y qui, sur la ligne $z_0 z_1$, sont des fonctions continues de t. Donc, le long de cette ligne, U'_i est une fonction continue de t. Il en est de même pour U''_i et, par suite, pour $|U''_i - U'_i|$.

La quantité t, variant de o à 1, parcourt un domaine d'un seul tenant. Donc $|U''_i - U'_i|$ jouit de la même propriété. Or U'_i, U''_i sont, en chaque point z, des racines de l'équation $f(u, z) = 0$. On a donc, ou $|U''_i - U'_i| = 0$ si ces racines sont identiques, ou $|U''_i - U'_i| \gtreqq \nu$, si elles sont différentes.

Ce dernier cas ne peut se présenter, car $|U''_i - U'_i|$ étant nul au point z_0 et ne pouvant prendre les valeurs intermédiaires entre o et ν, l'ensemble de ses valeurs ne serait pas d'un seul tenant.

Cela posé, considérons une fonction U_i égale à U'_i dans l'intérieur de $\mathfrak{P}'$ et sur sa frontière, à U''_i dans l'intérieur de $\mathfrak{P}''$ et sur sa frontière. Cette fonction sera évidemment continue dans l'intérieur de $\mathfrak{P}$.

En faisant successivement $i = 1, \ldots, n$, on aura les n fonctions demandées.

On peut, au moyen de ce lemme, ramener la démonstration

du théorème au cas où le contour $\mathfrak{L}$ est contenu en entier dans un cercle de rayon $< \varepsilon$ décrit autour d'un de ses points comme centre, ε étant une quantité que nous pourrons choisir aussi petite que nous voudrons.

On peut, en effet, au moyen de diagonales, décomposer l'intérieur de $\mathfrak{L}$ en une suite de triangles $T_1, T_2, \ldots$, ayant chacun un côté commun avec le suivant. Si le théorème est vrai pour chaque triangle, il le sera pour le quadrilatère formé par T_1 et T_2, puis pour le pentagone formé par T_1, T_2, T_3, et ainsi de suite.

Considérons donc un de ces triangles T. On peut le décomposer par une série de parallèles à la base, distantes les unes des autres de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$, en une série de tranches; il suffira d'établir le théorème pour chacune d'elles.

Subdivisons enfin la tranche considérée par des perpendiculaires à la base, distantes de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$; on la partagera ainsi en éléments, dont chacun sera un carré de côté $\frac{\varepsilon}{2}$ ou une partie d'un semblable carré; et il suffira d'établir la propriété pour chacun de ces éléments et, *a fortiori*, de l'établir pour un cercle de rayon ε ayant son centre en un point de cet élément, car l'élément tout entier lui sera intérieur.

220. Or on sait, par la démonstration que nous avons donnée de l'existence des fonctions implicites (**191**), que, pour tout point z_0 du domaine $\mathfrak{L}$ et pour toute racine u_i^0 de l'équation $f(u, z_0) = 0$, on peut déterminer un nombre ρ_i tel, que, dans un cercle de rayon ρ_i décrit autour de z_0 comme centre, il existe une fonction U_i de la variable complexe z, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = 0$ et se réduisant à u_i^0 pour $z = z_0$.

On pourra donc déterminer une quantité ρ telle que, dans un cercle K de rayon ρ décrit de z_0 comme centre, il existe n fonctions $U_1, \ldots, U_n$ de la variable complexe z, satisfai-

sant à l'équation $f(u, z) = 0$. Il suffira pour cela de prendre ρ égal à la plus petite des n quantités $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Il est clair que, si cette propriété appartient à un cercle K, elle appartiendra *a fortiori* à tout domaine contenu dans ce cercle.

Si donc il existe un point z_0, tel que cette propriété appartienne à tout cercle décrit de ce point comme centre, quel que soit son rayon, on n'aura qu'à prendre ce rayon assez grand pour en conclure que cette propriété appartient au domaine E, ce qu'il s'agit de démontrer.

Dans le cas contraire, les rayons des cercles décrits autour de z_0 et jouissant de la propriété demandée admettront un maximum r fini, mais différent de zéro. Aucun cercle de rayon $> r$ ne jouira de la propriété demandée; mais tout cercle de rayon $r - \lambda$ en jouira, quelque petit que soit λ.

A chaque point $z = x + iy$ de E correspond ainsi un nombre r unique et déterminé, lequel sera une fonction de x, y.

Cette fonction est continue. Soient, en effet, r et r' ses valeurs pour deux points voisins z et $z + h$. Décrivons de $z + h$ comme centre un cercle de rayon $r - \lambda - |h|$. Ce cercle sera contenu dans le cercle de rayon $r - \lambda$ décrit autour de z. On pourra donc y déterminer les n fonctions $U_1, \ldots, U_n$; donc son rayon ne pourra surpasser r', et l'on aura

$$r' \overline{\overline{>}} r - \lambda - |h|,$$

et, en faisant tendre λ vers zéro,

$$r' \overline{\overline{>}} r - |h|.$$

On trouvera de même

$$r \overline{\overline{>}} r' - |h|.$$

Donc $|r' - r|$ sera $\overline{\overline{<}} |h|$ et tendra vers zéro avec h.

La fonction r étant continue, toujours positive, admet dans E un minimum ε qu'elle atteint, et qui sera nécessairement > 0. La détermination des fonctions $U_1, \ldots, U_n$ pourra

donc se faire dans tout cercle de rayon $<\varepsilon$, quel que soit le point de E qui sert de centre; ce que nous voulons démontrer.

On voit, en outre, par cette analyse, que les fonctions $U_1, \ldots, U_n$ sont des fonctions synectiques de z et que leur dérivée en chaque point est donnée par la formule

$$\frac{dU_i}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial f(U_i, z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial f(U_i, z)}{\partial U_i}}.$$

221. L'une quelconque U_i des n fonctions, dont l'existence vient d'être établie, est entièrement définie dans E par la connaissance de sa valeur initiale u_i^0. Proposons-nous de calculer la valeur v_i qu'elle prend en un autre point ζ de E. Nous savons déjà que v_i est une des n racines de l'équation $f(u, \zeta) = 0$; mais il nous faut assigner un caractère qui permette de la distinguer des autres.

A cet effet, traçons dans E une ligne rectifiable quelconque L joignant les points z_0 et ζ; soit l la longueur de cette ligne. En intégrant la dérivée $\frac{dU_i}{dz}$ le long de cette ligne, on aura (200)

$$v_i - u_i^0 = \int_{z_0}^{\zeta} \frac{dU_i}{dz}\, dz$$

et comme $\left|\frac{dU_i}{dz}\right|$ est au plus égal à ϖ, on en déduit

$$|v_i - u_i^0| \leqq \varpi l.$$

Si $l < \frac{\nu}{2\varpi}$, cette inégalité suffira pour distinguer la racine v_i des autres racines de $f(u, \zeta) = 0$. Car soit v_k une de celles-ci, on aura

$$|v_i - v_k| \geqq \nu > 2\varpi l$$

et par suite

$$|v_k - u_i^0| \geqq |v_k - v_i| - |v_i - u_i^0| > \varpi l.$$

Si $l \overline{\overline{>}} \frac{\nu}{2\varpi}$, on partagera L par des points de division intermédiaires $z_1, z_2, \ldots$ en arcs dont chacun soit $< \frac{\nu}{2\varpi}$, et l'on calculera successivement les valeurs que prend U_i en chacun des points $z_1, z_2, \ldots, \zeta$.

222. Soit maintenant

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

une ligne continue quelconque L ne passant par aucun point critique; et soient $z_0 = x_0 + iy_0$, $\zeta = \xi + i\eta$ les extrémités de cette ligne; t_0 et τ les valeurs correspondantes de t. On pourra déterminer pour chaque valeur de l'indice i, et d'une seule manière, une fonction continue u_i de la variable t, satisfaisant tout le long de L à l'équation

$$o = f(u, z) = f[u, \varphi(t) + i\psi(t)]$$

et se réduisant à u_i^0 pour $t = t_0$.

En effet, supposons d'abord que L soit contenu en entier dans le domaine E formé par les points non extérieurs à un contour C fermé, continu, sans point multiple et laissant à son extérieur tous les points critiques. On peut déterminer dans ce domaine, comme on l'a vu, une fonction U_i, continue par rapport à x, y, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = o$ et se réduisant à u_i^0 pour $z = z_0$. Le long de la ligne L, x, y sont des fonctions continues de t. Les valeurs successives de U_i le long de cette ligne fourniront donc une fonction u_i de la variable t satisfaisant à l'énoncé.

Cette fonction est unique. En effet, s'il existait une autre fonction v_i de même nature, $|u_i - v_i|$ serait une fonction continue de t. Les valeurs de t comprises entre t_0 et τ formant un ensemble d'un seul tenant, il en est de même des valeurs correspondantes de $|u_i - v_i|$. D'ailleurs, u_i et v_i étant des racines de l'équation $f(u, z) = o$, $|u_i - v_i|$ sera nul ou $\overline{\overline{>}} \nu$ suivant que ces racines seront identiques ou non (**217**). Enfin, cette expression est nulle pour $z = z_0$; donc elle

devra l'être tout le long de L, pour que l'ensemble de ses valeurs soit d'un seul tenant.

Remarquons d'ailleurs que la valeur finale de u_i au point ζ ne sera autre chose que la valeur que prend en ce point la fonction U_i. Cette valeur finale resterait donc la même si l'on remplaçait la ligne L par toute autre ligne continue L' ayant les mêmes extrémités, et également contenue dans E.

Supposons au contraire qu'il n'existe aucun contour de l'espèce C dans l'intérieur duquel la ligne L soit contenue tout entière. On pourra tout au moins décomposer cette ligne en arcs partiels dont chacun soit renfermé dans un semblable contour.

Soient en effet t', t'' deux des valeurs de t; z', z'' les valeurs correspondantes de z. On sait qu'on peut, quelle que soit la quantité ε, déterminer une autre quantité δ telle que l'on ait toujours

$$|z''-z'|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad |t''-t'|<\delta.$$

Prenons pour ε une quantité moindre que la plus courte distance de L au point critique le plus voisin. Si nous subdivisons l'intervalle $t_0\tau$ par des points intercalaires $t_1, t_2, \ldots$ en intervalles $t_0t_1, \ldots, t_kt_{k+1}, \ldots$ d'étendue $<\delta$, tous les points de l'arc z_kz_{k+1}, par exemple, auront des distances mutuelles $<\varepsilon$. Ils seront donc contenus en entier dans un cercle C_k de rayon ε décrit autour de l'un d'eux, lequel cercle laissera à son extérieur tous les points critiques.

Cela posé, il existe le long de l'arc t_0t_1 une fonction continue de t satisfaisant à $f(u, z)=0$ et prenant pour $t=t_0$ la valeur initiale u_i^0; on pourra déterminer sa valeur finale u_i^1 pour $t=t_1$. Il existe de même le long de t_1t_2 une fonction analogue ayant pour $t=t_1$ la valeur initiale u_i^1; et l'on pourra déterminer sa valeur finale u_i^2 pour $t=t_2$. Continuant ainsi et réunissant ces fonctions successivement obtenues, on constituera une fonction u_i définie tout le long de L; sa valeur finale v_i sera une racine déterminée de l'équation $f(u, \zeta)=0$.

On voit par cette analyse que, lorsque z décrit la ligne L, les racines de l'équation $f(u, z) = 0$ varient chacune d'une manière continue, et passent des valeurs initiales $u_1^0, \ldots, u_n^0$ aux valeurs finales $v_1, \ldots, v_n$.

Il est clair que si z décrivait L en sens contraire, de ζ à z_0, ces racines repasseraient chacune par la même série de valeurs et reviendraient respectivement de $v_1, \ldots, v_n$ à $u_1^0, \ldots, u_n^0$.

223. Supposons que z, au lieu de décrire la ligne L, suive une autre ligne L′, joignant également z_0 à ζ. Les racines de l'équation $f(u, z) = 0$, variant d'une manière continue, passeront des valeurs initiales $u_1^0, \ldots, u_n^0$ à des valeurs finales $v'_1, \ldots, v'_n$. Ces nouvelles valeurs seront, comme $v_1, \ldots, v_n$, les racines de l'équation $f(u, \zeta) = 0$. Elles seront donc identiques à ces dernières, *à l'ordre près*. Si cet ordre est le même, nous dirons que les deux *chemins* L et L′ sont *équivalents;* mais on conçoit que cet ordre puisse au contraire être changé, et nous verrons plus tard qu'en prenant pour valeur initiale une racine donnée u_i^0 de $f(u, z_0) = 0$, et choisissant convenablement la ligne L′, on peut obtenir comme valeur finale l'une quelconque des racines de $f(u, \zeta) = 0$.

224. On peut, comme on va le voir, réduire un chemin quelconque allant de z_0 à ζ à un chemin type qui lui soit équivalent.

Désignons par L un chemin fixe choisi à volonté de z_0 à ζ; par L^{-1} le même chemin décrit en sens contraire de ζ à z_0; un autre chemin quelconque L′ allant de z_0 à ζ sera équivalent au chemin $L'L^{-1}L$.

En effet, lorsque z parcourt L′, u_i passera de la valeur initiale u_i^0 à une valeur finale v; lorsque z parcourt ensuite L^{-1}, u_i passera de la valeur v à une valeur u^0; il repassera de u^0 à v lorsque z parcourra L. La valeur finale sera donc la même que si l'on s'était borné à faire le premier trajet L′.

Or $L'L^{-1}$ est un contour fermé ramenant z à sa valeur initiale z_0.

Donc *tout chemin tracé de z_0 à ζ équivaut à un contour fermé* $L'L^{-1} = C$ *suivi du chemin* L. Il ne nous reste donc qu'à étudier la réduction des contours fermés.

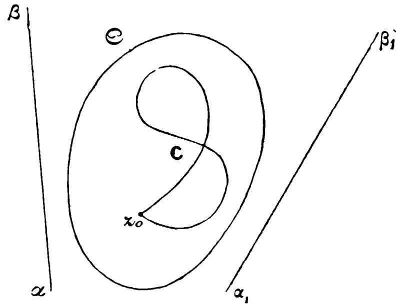
225. A cet effet, traçons, à partir de chacun des points critiques α, $\alpha_1, \ldots$, une ligne continue, sans points multiples, s'étendant jusqu'à l'infini. Nous donnerons à ces lignes $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, ... le nom de *coupures*. Nous les supposons menées de manière à ne pas se rencontrer; à cela près, leur tracé est arbitraire.

Il est permis d'admettre que le contour C à étudier ne rencontre ces coupures qu'en un nombre limité de points. En effet, on peut, si cela est utile; choisir pour coupures des lignes droites. D'autre part, si nous décomposons, comme au n° 222, la ligne C en arcs $z_0 z_1, \ldots, z_k z_{k+1}, \ldots$ assez petits pour que chacun d'eux, tel que $z_k z_{k+1}$, soit contenu dans un cercle C_k ne contenant aucun point critique, les valeurs de u_i aux points successifs $z_0, z_1, \ldots$ et enfin sa valeur finale seront évidemment les mêmes, que l'on suive la courbe C ou le polygone inscrit $P = z_0 z_1 \ldots$. Ce contour polygonal est donc équivalent à C et peut lui être substitué au besoin. Or ce nouveau contour ne peut rencontrer les coupures qu'en un nombre limité de points.

226. Cela posé, si C ne traverse aucune coupure, on pourra (*fig.* 4) l'envelopper par un contour fermé $\mathfrak{C}$ sans point multiple dont la distance à C soit partout moindre que celle de C à la coupure la plus voisine, et ce contour $\mathfrak{C}$ ne contiendra évidemment aucun point critique. Soit U_i la fonction de z déterminée dans $\mathfrak{C}$ par l'équation $f(u, z) = 0$ et la valeur initiale u_i^0 pour $z = z_0$; u_i étant égal tout le long de C à U_i, qui n'a qu'une valeur en chaque point de l'intérieur de $\mathfrak{C}$, reviendra à sa valeur initiale en même temps que z. Le contour C est donc équivalent à zéro.

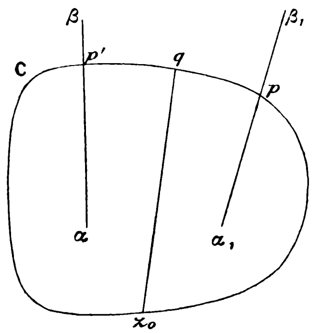
Si C traverse m fois les coupures, il équivaut à m contours successifs, dont chacun les traverse une fois seulement. En

Fig. 4.



effet, soient p (*fig.* 5) le premier point d'intersection que l'on rencontre en suivant le contour C; p' le second; q un

Fig. 5.



point de C intermédiaire entre p et p'. Joignons q à z_0 par une ligne qui ne traverse aucune coupure. Le contour

$$C = z_0 p\, q\, p' z_0$$

équivaut évidemment au suivant

$$z_0 p\, q \cdot q\, z_0 q \cdot q\, p' z_0,$$

lequel se compose :

1° Du contour fermé $C_1 = z_0 p\, q\, z_0$ qui ne traverse les coupures qu'au seul point p.

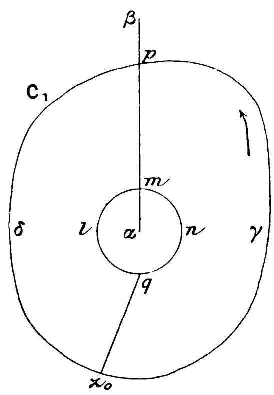
2° Du contour fermé $C' = z_0 q p' z_0$, qui ne les traverse que $m - 1$ fois.

Si $m > 2$, on appliquera à C′ une décomposition analogue et on arrivera enfin à montrer que C est équivalent à $C_1 C_2 \ldots C_m$, les contours $C_1, \ldots, C_m$ ne traversant chacun les coupures qu'en un seul point.

227. Considérons un de ces derniers contours C_1, traversant en un point p la coupure $\alpha\beta$ correspondant au point critique α. Traçons autour du point α un cercle d'un rayon arbitraire assez petit pour laisser à son extérieur tous les autres points critiques.

Joignons ce cercle au point z_0 par une ligne déterminée $q z_0$

Fig. 6.



qui ne traverse aucune coupure, mais qui peut être choisie, d'ailleurs, arbitrairement.

Supposons le contour C_1 décrit dans le sens de la flèche. La portion $z_0 \gamma p$ de ce contour est évidemment équivalente à $z_0 q n m p$; car on peut envelopper le système de ces deux lignes par un contour ne contenant aucun point critique. Par la même raison, $p \delta z_0$ est équivalent à $p m l q z_0$. Donc, le contour total C_1 équivaut au contour $z_0 q n m p m l q z_0$, ou en

supprimant dans ce dernier la ligne mp, décrite deux fois de suite en sens contraire, au contour $z_0 q n m l q z_0$. .

Ce dernier contour, formé de la ligne $z_0 q$, du cercle $q n m l q$ et de la ligne de retour $q z_0$, est entièrement déterminé. Nous l'appellerons le *contour élémentaire* (ou le *lacet*) correspondant au point critique α.

Si le contour C_1 était décrit dans un sens contraire à celui que nous avons supposé, il serait équivalent au même lacet, décrit en sens inverse.

Nous aurons donc ce théorème :

Soit L *une ligne déterminée joignant* z_0 *à* ζ; *soient d'autre part* Γ, Γ_1, ... *les lacets correspondants aux divers points critiques* α, α_1, ..., *ces lacets étant décrits dans le sens direct, c'est-à-dire de manière que dans le mouvement on laisse à sa gauche l'intérieur du petit cercle;* Γ^{-1}, Γ_1^{-1}, ... *les mêmes lacets, décrits dans le sens rétrograde. Tout chemin* L', *joignant* z_0 *à* ζ, *sera équivalent à une combinaison des lacets* Γ, Γ_1, ..., Γ^{-1}, Γ_1^{-1}, ... *suivie du chemin* L.

228. Lorsque z, partant de la valeur initiale z_0, parcourt un lacet Γ (ou tout autre contour équivalent), la fonction u_i, qui correspond à la valeur initiale u_i^0, prendra une suite de valeurs que nous pouvons calculer de proche en proche; nous trouverons comme valeur finale une quantité u_k^0, qui sera, comme la valeur initiale u_i^0, une racine de l'équation $f(u, z_0) = 0$. En faisant un calcul analogue pour chacune des racines u_i^0 prise comme valeur initiale, on retrouvera, comme valeurs finales, la même série de quantités, dans le même ordre ou dans un ordre différent.

Le même contour, décrit dans le sens rétrograde, conduira réciproquement de la valeur initiale u_k^0 à la valeur finale u_i^0.

Supposons qu'on ait fait tous les calculs nécessaires pour établir la correspondance entre les valeurs initiales et les valeurs finales de u_i pour chaque valeur de i et pour chacun des lacets Γ, Γ_1, ...

Supposons qu'on ait fait également les calculs nécessaires pour déterminer la valeur finale v_i que chaque fonction u_i prend au point ζ lorsque z parcourt la ligne L.

On pourra dès lors, sans nouveau calcul, déterminer la valeur finale de u_i, lorsque l'on se rend de z_0 à ζ suivant une ligne quelconque L'. En effet, l'on voit immédiatement, à la seule inspection de la figure, quelle est la combinaison de lacets qui, suivie du chemin L, équivaut à L'.

Supposons, par exemple, que L' soit équivalent à $\Gamma\Gamma_1 L$.

On sait, par les calculs précédents, que, lorsque z parcourt Γ, la fonction à étudier passe de la valeur initiale u_i^0 à une valeur finale connue u_k^0. On sait de même que, lorsque z parcourt ensuite Γ_1, la fonction définie par la valeur initiale u_k^0 acquiert une valeur finale connue u_l^0. Enfin, lorsque z parcourra L, la fonction passera de la valeur initiale u_l^0 à la valeur finale v_l.

229. Désignons par E l'ensemble de tous les points du plan à l'exclusion des coupures. Soient z_0 un point fixe et ζ un autre point quelconque, tous deux situés dans ce domaine. Lorsque z se rend de z_0 à ζ sans sortir de ce domaine, celles des racines de l'équation $f(u, z) = 0$, dont la valeur initiale était u_i^0, prendra en ζ une valeur finale v_i, racine de l'équation $f(u, \zeta) = 0$, et indépendante du chemin suivi par z. Il résulte d'ailleurs de l'analyse précédente que v_i est une fonction synectique de ζ. On voit donc qu'il existe, dans le domaine E, n fonctions synectiques $U_1, \ldots, U_n$ de z, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = 0$ et caractérisées chacune par la valeur qu'elle prend pour $z = z_0$.

Mais ces fonctions, nettement séparées dans le domaine E, cessent de l'être si z devient libre de traverser les coupures (sans toutefois passer par les points critiques). Supposons, en effet, qu'en décrivant le contour élémentaire correspondant à la coupure $\alpha\beta$, par exemple, u passe de la valeur initiale u_i^0 à la valeur finale u_k^0. Si z se rend de z_0 à ζ par un chemin qui traverse la coupure $\alpha\beta$, u passera de la

valeur initiale u_i^0 à une valeur finale qui ne sera plus v_i, mais v_k.

Si donc z n'est assujetti dans sa variation à aucune restriction (sauf celle de ne pas passer par les points critiques), nous devrons considérer les fonctions $U_1, \ldots, U_n$ comme appartenant à un même système analytique, que nous appellerons la *fonction algébrique* u définie par l'équation $f(u, z) = 0$; à chaque valeur de z correspondront n valeurs différentes de u.

Nous dirons que $U_1, \ldots, U_n$ sont les *branches* ou les *déterminations* de cette fonction dans le domaine E.

Cette répartition des valeurs de la fonction algébrique u sur des branches distinctes $U_1, \ldots, U_n$ synectiques dans le domaine E a l'avantage de permettre l'application des théorèmes établis précédemment pour les fonctions synectiques. Mais cette distinction est artificielle; car elle dépend du tracé des coupures, qui est arbitraire.

V. — Transcendantes élémentaires.

230. Les transcendantes les plus simples sont celles auxquelles on se trouve conduit en cherchant à intégrer les fractions rationnelles.

Une semblable fraction est une somme de termes entiers tels que Az^m et de fonctions simples telles que $\frac{A}{(z-a)^n}$.

Or Az^m est la dérivée de $\frac{Az^{m+1}}{m+1}$. La forme générale de ses intégrales sera donc

$$\frac{Az^{m+1}}{m+1} + \text{const}.$$

C'est un polynôme entier.

D'autre part, si $n > 1$, $\frac{A}{(z-a)^n}$ est évidemment la dérivée de $\frac{A}{(1-n)(z-a)^{n-1}}$; et la forme générale de ses intégrales

sera

$$\frac{A}{(1-n)(z-a)^{n-1}} + \text{const.},$$

expression rationnelle.

Il reste à trouver les fonctions primitives des fractions simples de la forme $\frac{A}{z-a}$.

231. Logarithme. — Supposons qu'on ait trouvé une fonction primitive $f(z)$ de la fonction $\frac{1}{z}$. Les fonctions primitives de $\frac{A}{z-a}$ seront évidemment

$$A f(z-a) + \text{const.}$$

On n'a donc qu'à chercher une fonction $f(z)$ ayant pour dérivée $\frac{1}{z}$ et satisfaisant par suite à l'équation

$$df = \frac{dz}{z}.$$

La fonction $\frac{1}{z}$ étant synectique dans tout le plan, à l'exception du point critique $z = 0$, nous savons d'avance (**200**) que dans l'intérieur de tout contour fermé C qui n'enveloppe pas ce point, on pourra déterminer des fonctions synectiques f satisfaisant à cette équation.

Pour obtenir l'expression de ces fonctions, désignons par ρ le module de z, par φ l'un de ses arguments, de telle sorte qu'on ait

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Changeant ρ et φ en $\rho + d\rho$, $\varphi + d\varphi$, il viendra

$$dz = d\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \rho\, d\varphi(-\sin\varphi + i\cos\varphi),$$

d'où

$$df = \frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + i\,d\varphi = d\,\text{Log}\,\rho + i\,d\varphi$$

et par suite

$$f = \text{Log}\,\rho + i\varphi + \text{const.}$$

Supposons la constante nulle, nous aurons

(1) $$f = \operatorname{Log}\rho + i\varphi.$$

La quantité z a une infinité d'arguments; φ' désignant l'un d'eux, leur formule générale sera

$$\varphi = \varphi' + 2k\pi,$$

k étant un entier positif ou négatif.

L'expression $\operatorname{Log}\rho + i\varphi$, trouvée ci-dessus, admet donc pour chaque valeur de z une infinité de valeurs

$$\operatorname{Log}\rho + i(\varphi' + 2k\pi).$$

On les nomme les *logarithmes* de z, et on les représente par $\log z$.

En donnant successivement à φ les diverses valeurs dont il est susceptible, on obtiendra une infinité de fonctions distinctes

$$f_0 = \operatorname{Log}\rho + i\varphi',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_k = \operatorname{Log}\rho + i(\varphi' + 2k\pi),$$

dont chacune sera synectique à l'intérieur de C.

Cela posé, par le point critique $z = 0$, traçons une coupure arbitraire (par exemple, une demi-droite faisant un angle donné λ avec l'axe des x), et considérons le domaine formé par tous les points du plan, à l'exclusion de cette coupure.

Soit z un point de ce domaine, et prenons pour φ' celui de ses arguments qui est compris entre λ et $\lambda - 2\pi$. Il est clair que ρ et φ' sont entièrement déterminés en chaque point z.

Chacune des fonctions f_k a donc une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z; elle a d'ailleurs pour dérivée $\frac{1}{z}$, qui est continue; elle est donc synectique.

Mais il en est autrement si l'on cesse d'astreindre z à ne pas traverser la coupure. Supposons en effet que z décrive dans le sens direct un contour fermé sans point multiple en-

tournant le point critique $z = 0$. Lorsqu'il reviendra à sa valeur initiale z_0, son argument se sera accru de 2π et, au lieu de la valeur initiale

$$f_k = \operatorname{Log} \rho_0 + i(\varphi'_0 + 2k\pi),$$

on aura comme valeur finale

$$f_{k+1} = \operatorname{Log} \rho_0 + i[\varphi'_0 + 2(k+1)\pi].$$

Donc $f_0, \ldots, f_k$ considérées dans tout le plan (à l'exclusion du point critique $z = 0$) ne sont pas des fonctions distinctes, mais des branches d'une même fonction, qu'on représente par $\log z$.

Ces branches se permutent circulairement par une rotation autour du point $z = 0$.

232. Soient

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \qquad z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),$$

d'où

$$\log z = \operatorname{Log} \rho + i\varphi, \qquad \log z_1 = \operatorname{Log} \rho_1 + i\varphi_1.$$

On en déduit

$$\log z + \log z_1 = \operatorname{Log} \rho + \operatorname{Log} \rho_1 + i(\varphi + \varphi_1) = \operatorname{Log} \rho\rho_1 + i(\varphi + \varphi_1).$$

Or $\rho\rho_1$ est le module, et $\varphi + \varphi_1$ l'un des arguments de zz_1. Donc le second membre de cette équation est l'un des logarithmes de zz_1. Les autres ne diffèrent de celui-là que de multiples entiers de $2\pi i$. On aura donc

$$\log z + \log z_1 = \log zz_1 + 2k\pi i, \tag{2}$$

l'entier k dépendant du logarithme choisi.

233. Exponentielle. — Nous désignerons par e^z la fonction inverse de $\log z$, définie par l'équation

$$\log u = z.$$

Soit $z = x + iy$, $u = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. On aura, pour

déterminer ρ et φ, les équations

$$\operatorname{Log} \rho = x, \qquad y = \varphi.$$

La première équation donne $\rho = e^x$, e^x désignant la fonction de x inverse de $\operatorname{Log} x$, et définie au n° **116**. On aura, par suite,

$$(3) \qquad e^z = u = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Cette fonction est synectique dans tout le plan. Elle prend toutes les valeurs possibles, zéro excepté. Quand x tend vers $-\infty$, elle tend vers o. Quand x tend vers $+\infty$, elle tend vers ∞, mais de telle sorte que son argument y reste indéterminé. Enfin, si x restant fini y tend vers ∞, elle ne tend nécessairement vers aucune limite déterminée.

Elle a d'ailleurs pour dérivée

$$\frac{1}{(\log u)'} = u = e^z;$$

donc

$$(4) \qquad (e^z)' = e^z.$$

Soient

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1;$$

on aura

$$(5) \quad e^z e^{z_1} = e^{x+x_1}[\cos(y + y_1) + i \sin(y + y_1)] = e^{z+z_1}.$$

Remarquons enfin que l'on a

$$(6) \qquad \begin{cases} e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \\ e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1, \end{cases}$$

$$(7) \qquad e^{z+k\pi i} = e^z e^{k\pi i} = (-1)^k e^z.$$

Donc e^z ne change pas quand on accroît z d'un multiple de $2\pi i$; on énonce cette propriété en disant que la fonction est *périodique* et que sa période est $2\pi i$.

234. Puissances. — Nous définirons l'expression z^m, z et m désignant deux nombres complexes quelconques, dont le

premier n'est pas nul, par l'équation

$$z^m = e^{m \log z}.$$

Soient $m = \alpha + \beta i$, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; il viendra

$$\begin{aligned} z^m &= e^{(\alpha+\beta i)\,[\mathrm{Log}\,\rho + i(\varphi+2k\pi)]} \\ &= e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,\rho - \beta(\varphi+2k\pi) + i[\beta\,\mathrm{Log}\,\rho + \alpha(\varphi+2k\pi)]}. \end{aligned}$$

Le module M et l'argument Φ de z^m seront donc donnés par les formules

$$\text{(8)} \qquad M = e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,\rho - \beta(\varphi+2k\pi)},$$

$$\text{(9)} \qquad \Phi = \beta\,\mathrm{Log}\,\rho + \alpha(\varphi + 2k\pi) + 2k'\pi.$$

Si β n'est pas nul, à chaque valeur de k correspondra une valeur différente de M, et z^m aura une infinité de valeurs distinctes.

Si $\beta = 0$, M n'a plus qu'une seule valeur; toutefois, si α est irrationnel, aux diverses valeurs de k correspondront autant de valeurs de Φ, ne différant pas les unes des autres de multiples de 2π, et fournissant par suite autant de valeurs distinctes pour z^m.

Si, au contraire, α est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, deux valeurs de k qui diffèrent de multiples de q donneront la même valeur pour z^m. Cette expression n'aura donc que q valeurs distinctes, correspondant à $k = 0, 1, \ldots, q-1$.

Dans ce cas, l'expression $z^m = u$ sera racine de l'équation algébrique

$$u^q = z^p;$$

car, en élevant les deux membres de l'équation

$$u = z^m = e^{\frac{p}{q}\log z}$$

à la puissance q, il viendra

$$u^q = e^{p \log z}.$$

Or, si p est positif, le second membre de cette équation est

le produit de p facteurs égaux à $e^{\log z}$ ou à z; si p est un nombre négatif $-p'$, ce sera le produit de p' facteurs égaux à $\frac{1}{z}$.

Lorsque m est réel et z positif, l'un des logarithmes de z, $\text{Log}\, z$, est réel, et l'une des valeurs de z^m, $e^{m\,\text{Log}\, z}$, est réelle.

233. On a, ρ étant le module et φ l'un des arguments de z,

$$\log z = \text{Log}\,\rho + i\varphi + 2k\pi i$$

et, par suite,

(10) $$z^m = e^{2mk\pi i} e^{m(\text{Log}\,\rho + i\varphi)}.$$

1° Soit z' une autre quantité ayant le module ρ' et un argument φ'; on aura de même

$$z'^m = e^{2mk'\pi i} e^{m(\text{Log}\,\rho' + i\varphi')},$$

$$(zz')^m = e^{2mk''\pi i} e^{m[\text{Log}\,\rho\rho' + i(\varphi+\varphi')]};$$

d'où

(11) $$z^m z'^m = (zz')^m e^{2m\text{K}\pi i},$$

K étant un entier, égal à $k + k' - k''$.

2° On aura, d'autre part,

$$z^{m'} = e^{2m'k'\pi i} e^{m'(\text{Log}\,\rho + i\varphi)},$$

$$z^{m+m'} = e^{2(m+m')k''\pi i} e^{(m+m')(\text{Log}\,\rho + i\varphi)};$$

d'où

(12) $$z^m z^{m'} = z^{m+m'} e^{2\pi i[m(k-k'') + m'(k'-k'')]}.$$

3° Enfin z^m aura, pour l'un de ses logarithmes,

$$2mk\pi i + m(\text{Log}\,\rho + i\varphi).$$

Donc

$$(z^m)^{m'} = e^{m'\log z^m} = e^{2m'k'\pi i} e^{2mm'k\pi i + mm'(\text{Log}\,\rho + i\varphi)}.$$

D'ailleurs,

$$z^{mm'} = e^{2mm'k''\pi i} e^{mm'(\text{Log}\,\rho + i\varphi)}.$$

Donc, enfin,

(13) $$(z^m)^{m'} = z^{mm'} e^{[(k-k'')m + k']2m'\pi i}.$$

236. Supposons z variable; l'expression

$$u = z^m = e^{m \log z}$$

sera une fonction de fonction de z qu'il est aisé d'étudier.

Traçons, à partir de l'origine des coordonnées, une coupure rectiligne, faisant l'angle λ avec l'axe des x. Dans tout le reste du plan, les diverses valeurs de $\log z$ peuvent être réparties en branches synectiques : u, étant déterminé sans ambiguïté en fonction de $\log z$, jouira de la même propriété. Si l'on adopte, pour φ, celui des arguments de z qui est $> \lambda$, mais $< 2\pi + \lambda$, ces diverses branches correspondront aux diverses valeurs que l'on peut donner à l'entier k dans la formule (10).

Il est aisé de voir comment ces diverses branches se permutent entre elles lorsque z décrit un contour fermé entourant le point critique o. Supposant ce contour suivi dans le sens direct, le module de z reviendra à sa valeur initiale; mais son argument se sera accru de 2π. On aura donc passé de la valeur initiale

$$u_k = e^{2mk\pi i} e^{m(\mathrm{L} \log \rho + i\varphi)}$$

à la valeur finale

$$e^{2m\pi i} u_k = u_{k+1}.$$

237. La dérivée de z^m se trouvera en dérivant l'équation qui définit cette fonction. On trouve ainsi

$$(z^m)' = e^{m \log z} \frac{m}{z}.$$

Mais

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = e^{-\log z};$$

donc

$$(z^m)' = m e^{(m-1)\log z}.$$

Cette expression peut s'écrire

$$(14) \qquad (z^m)' = m z^{m-1},$$

à la condition d'adopter, pour le calcul de z^{m-1}, la même valeur de $\log z$ que pour celui de z^m.

238. Cherchons enfin si z^m tend vers une limite lorsque z tend vers zéro ou vers ∞.

Posons
$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad m = \alpha + \beta i,$$

le module M et l'argument Φ de z^m seront donnés par les formules (8) et (9).

Si β n'est pas nul, il est clair que de quelque manière que ρ varie, on peut faire varier simultanément φ, de telle sorte que M prenne une suite de valeurs entièrement arbitraire; donc z^m ne tendra vers aucune limite déterminée.

Supposons, au contraire, que β soit nul, ou que φ soit astreint à rester compris entre deux nombres fixes.

Soit d'abord $\alpha > 0$. Si z (et, par suite, ρ) tend vers zéro, $\mathrm{Log}\,\rho$ tendra vers $-\infty$, M (et, par suite, z^m) vers zéro. Si z tend vers ∞, $\mathrm{Log}\,\rho$ et M tendront vers $+\infty$; z^m tendra donc vers ∞, mais sans que son argument Φ tende nécessairement vers une limite.

Si $\alpha < 0$, le contraire aura lieu. Lorsque z tendra vers 0, z^m tendra vers ∞, sans que son argument tende nécessairement vers une limite; mais, si z tend vers ∞, z^m tendra vers zéro.

Enfin, si α est nul ainsi que β, on aura constamment
$$M = 1, \qquad \Phi = 2k\pi; \qquad \text{d'où} \qquad z^m = 1.$$

239. Fonctions trigonométriques. — Si, dans l'équation (3), qui définit e^z, nous posons $x = 0$, il viendra

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{15}$$

et, en changeant le signe de y,

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y. \tag{16}$$

On en déduit

$$(17) \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Ces formules, établies dans le cas où y est réel, pourront servir de définition à $\cos y$ et $\sin y$, lorsque cette variable est complexe.

Quant à $\operatorname{tang} y$ et $\cot y$, elles continuent à être définies par les formules

$$(18) \qquad \operatorname{tang} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{\cot y}.$$

Ces fonctions n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable. Les deux premières seront synectiques dans tout le plan; mais $\operatorname{tang} y$ et $\cot y$ deviendront respectivement infinies pour les valeurs de y qui annulent $\cos y$ ou $\sin y$.

Toutes les formules de la Trigonométrie subsistent pour les valeurs complexes de la variable, car elles se déduisent des suivantes

$$\sin(0) = 0, \qquad \cos(0) = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \cos(-a) = \cos a,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

dont on peut vérifier immédiatement l'exactitude en substituant aux lignes trigonométriques leurs expressions en exponentielles.

On vérifie de même les formules

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z,$$

d'où

$$(\operatorname{tang} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

240. On a, d'après les formules d'addition,

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + i\cos x \frac{e^{y}-e^{-y}}{2},$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$= \cos x \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - i\sin x \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.$$

Ces expressions ne peuvent s'annuler que si leur partie réelle et leur partie imaginaire s'annulent séparément. D'ailleurs $\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ est toujours positif et différent de zéro; en outre, $\sin x$ et $\cos x$ ne peuvent s'annuler à la fois; donc $\sin(x+iy)$ ne s'annule que si l'on a

$$\sin x = 0, \qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = 0,$$

d'où

$$x = k\pi, \qquad y = 0,$$

et $\cos(x+iy)$ ne s'annulera que si l'on a

$$\cos x = 0, \qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = 0,$$

d'où

$$x = (k+\tfrac{1}{2})\pi, \qquad y = 0.$$

Si y tend vers ∞, $\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ tendra vers $+\infty$, et $\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$ vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, suivant que y sera positif ou négatif. Donc $\sin(x+iy)$ et $\cos(x+iy)$ tendront vers ∞; mais leur argument dépend de x et ne tendra pas nécessairement vers une limite.

Si y restant fini, x tend vers ∞, $\sin(x+iy)$ et $\cos(x+iy)$ resteront, au contraire, finis, sans tendre nécessairement vers une limite.

241. Tout produit de sinus et cosinus peut être transformé en une somme de sinus et cosinus. Il suffit, pour cela,

de remplacer les sinus et cosinus par leur valeur en exponentielles, d'effectuer les multiplications et de revenir ensuite aux lignes trigonométriques.

Proposons-nous, par exemple, d'exprimer $\sin^m z$ en fonction des sinus et des cosinus de z et de ses multiples (m étant supposé entier). On aura

$$\begin{aligned}(2i)^m \sin^m z &= (e^{iz} - e^{-iz})^m \\ &= e^{miz} - me^{(m-2)iz} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)iz} - \ldots.\end{aligned}$$

Associons ensemble les termes à égale distance des extrêmes; il viendra :

Si m est impair,

$$\begin{aligned}&(2i)^m \sin^m z \\ &= 2i\left[\sin mz - m\sin(m-2)z + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)z - \ldots\right];\end{aligned}$$

si m est pair,

$$\begin{aligned}(2i)^m \sin^m z = 2\cos mz &- 2m\cos(m-2)z \\ &+ 2\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)z - \ldots \\ &+ (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1.2\ldots m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

On aura, de même,

$$2^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m = e^{miz} + me^{(m-2)iz} + \ldots$$

et, en associant les termes deux à deux,

$$2^m \cos^m z = 2\cos mz + 2m\cos(m-2)z + \ldots.$$

Cette série se terminera, si m est impair, par un terme en $\cos z$; si m est pair, par un terme constant $\dfrac{1.2\ldots m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)^2}$.

242. On peut réciproquement exprimer $\cos mz$ et $\sin mz$

en fonction de $\sin z$ et de $\cos z$. On a, en effet,

$$\cos mz + i\sin mz = e^{miz} = (e^{iz})^m = (\cos z + i\sin z)^m,$$

d'où, en développant par la formule du binôme et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\cos mz = \cos^m z - \frac{m(m-1)}{2}\cos^{m-2} z \sin^2 z + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} z \sin^4 z + \ldots,$$

$$\sin mz = m\cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} z \sin^3 z + \ldots.$$

Remplaçant dans ces formules $\sin^2 z$ par $1 - \cos^2 z$, ou réciproquement, on voit :

1° Que $\cos mz$ s'exprime par une fonction entière et de degré m en $\cos z$;

2° Que $\sin mz$ est une fonction entière de degré m en $\sin z$ si m est impair ; que, si m est pair, $\sin mz$ sera égal au produit de $\cos z$ par une fonction de degré $m-1$ en $\sin z$.

243. Soit m un entier impair quelconque ; on aura, comme nous venons de le voir,

$$\sin mz = f(\sin z),$$

f désignant une fonction entière de degré m. Il est aisé de mettre cette fonction sous forme d'un produit de facteurs.

En effet, $\sin mz$ s'annule pour les m valeurs suivantes de z

$$0, \quad \pm\frac{\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \pm\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m},$$

auxquelles correspondent autant de valeurs distinctes pour $\sin z$.

On aura donc

$$\sin mz = \mathrm{A}\sin z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right),$$

A désignant un facteur numérique.

Pour le déterminer, donnons à z une valeur infiniment petite. Le premier membre de l'équation précédente aura pour valeur principale mz et le second Az. Donc $A = m$.

Changeons z en $\frac{\pi z}{m}$; l'équation deviendra

$$\sin \pi z = m \sin \frac{\pi z}{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right).$$

244. Arc tangente. — La fonction $u = \operatorname{arc\,tang} z$, inverse de la tangente, sera définie par l'équation

$$z = \operatorname{tang} u = \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}}$$

ou

$$iz = \frac{e^{2iu} - 1}{e^{2iu} + 1}.$$

On en déduit

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z},$$

$$(19) \quad u = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z} = \frac{1}{2i} [\log(i - z) - \log(i + z) + 2k\pi i].$$

Pour chaque valeur de z, les logarithmes ont chacun une infinité de valeurs, différant de multiples de $2\pi i$; u aura donc une infinité de valeurs différant entre elles de multiples de π.

Les valeurs $z = \pm i$ font exception. Pour chacune d'elles, l'un des logarithmes devient infini, et il en est de même de u.

Par chacun de ces deux points critiques traçons une coupure. Dans le reste du plan, les diverses valeurs de chaque logarithme et, par suite, celles de u forment des branches synectiques.

Il reste à voir comment ces branches se permutent entre elles à la traversée des coupures. Pour cela, supposons que z décrive, dans le sens direct, un contour fermé entourant le

point i en laissant le point $-i$ à son extérieur. L'argument de $i-z$, en variant d'une manière continue, se sera accru de 2π; celui de $i+z$ reprendra sa valeur initiale. Le premier logarithme sè sera donc accru de $2\pi i$, sans que le second ait changé. La valeur initiale de u étant u_0, sa valeur finale sera donc $u_0+\pi$.

On voit de même que, si z tournait autour du point $-i$, u passerait de la valeur initiale u_0 à la valeur finale $u_0-\pi$.

En dérivant l'équation (19), on voit, d'ailleurs, que la fonction u a pour dérivée

$$u' = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{i-z} - \frac{1}{i+z}\right) = \frac{1}{z^2+1}.$$

245. Arc sinus. — Considérons encore la fonction

$$u = \arcsin z,$$

inverse du sinus et définie par l'équation

$$z = \sin u = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i};$$

d'où, en résolvant par rapport à e^{iu},

$$e^{iu} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

$$(20) \qquad u = \frac{1}{i}\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right),$$

$\sqrt{1-z^2}$ désignant l'un des deux nombres réels ou complexes dont le carré est $1-z^2$.

Soit iu_0 l'un des logarithmes de $iz+\sqrt{1-z^2}$; les autres auront pour forme générale $iu_0+2k\pi i$; d'autre part, $iz+\sqrt{1-z^2}$ étant égal à $\dfrac{-1}{iz+\sqrt{1-z^2}}$ admettra, pour un de ses logarithmes, $i\pi - iu_0$, et la forme générale de ses logarithmes sera $i(\pi-u_0)+2k\pi i$. Les diverses valeurs de u seront donc données par le système des deux formules

$$u = \begin{cases} u_0 + 2k\pi, \\ \pi - u_0 + 2k\pi. \end{cases}$$

Ces valeurs sont toutes distinctes, à moins que u_0 ne soit un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, auquel cas la seconde formule donne les mêmes valeurs que la première. Si cela a lieu, on aura

$$\frac{1}{i}\log(iz+\sqrt{1-z^2}) = \frac{2k'+1}{2}\pi,$$

$$iz+\sqrt{1-z^2} = e^{\frac{2k'+1}{2}\pi i} = (-1)^{k'}i;$$

d'où

$$z = (-1)^{k'} = \pm 1.$$

On a d'ailleurs, en dérivant l'équation (20),

$$u' = \frac{1}{i}\,\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(i - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,2z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

dérivée finie et continue, sauf pour les valeurs critiques $z = \pm 1$.

246. Considérons la région du plan non extérieure à un contour fermé sans point multiple qui laisse à son extérieur les deux points critiques. Dans cette région, u_0, admettant une dérivée constamment finie, varie d'une manière continue et n'est jamais multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Le module de la différence entre u_0 et celui de ces multiples qui en est le plus voisin restera supérieur à un nombre positif fixe. Les différences mutuelles des racines u, étant de l'une des deux formes $2k\pi$, $2u_0+(2k+1)\pi$, resteront aussi supérieures à un nombre fixe.

En raisonnant comme pour les fonctions algébriques, on en conclut que, si l'on trace, à partir des deux points critiques, des coupures quelconques, les valeurs de u pourront, dans tout le reste du plan, se répartir en branches synectiques.

247. Supposons, pour plus de simplicité, les coupures tracées de manière à ne pas rencontrer la portion de l'axe des x située entre -1 et $+1$. Chacune des branches de la

fonction u sera caractérisée par la valeur qu'elle prend pour $z = 0$, laquelle est un des nombres $k\pi$, k étant un entier. Désignons par u_k la branche qui correspond à la valeur $k\pi$.

Lorsque u varie de $(k - \frac{1}{2})\pi$ à $(k + \frac{1}{2})\pi$, son sinus z reste continu et réel et varie de -1 à $+1$ ou de $+1$ à -1, suivant que k est pair ou impair, en passant par la valeur 0 pour $u = k\pi$. Donc réciproquement, si z varie de -1 à $+1$, en restant réel, u_k variera de $\left[k - \frac{(-1)^k}{2}\right]\pi$ à $\left[k + \frac{(-1)^k}{2}\right]\pi$. Donc, en chacun de ces deux points, les branches prendront deux à deux des valeurs égales, de telle sorte qu'au point -1 on ait

$$u_{2k} = u_{2k-1} = \frac{2k-1}{2}\pi,$$

au point $+1$,

$$u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{2k+1}{2}\pi.$$

Les deux branches qui deviennent ainsi égales en un point critique se permutent entre elles si z décrit un contour fermé sans point multiple C entourant ce point. Supposons, en effet, ce qui est permis, que ce contour soit infiniment petit et soit décrit autour du point $+1$, par exemple. Tout le long de ce contour, chacune des branches de la fonction u conservera une valeur infiniment voisine de la valeur limite qu'elle atteint au point critique; car, $1 - z^2$ étant infiniment petit, il en est de même de $\sqrt{1 - z^2}$; donc $iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ différera infiniment peu de sa valeur limite i; son module et son argument et, par suite, son logarithme, différeront infiniment peu de leurs valeurs limites.

Parmi les diverses branches de la fonction, il en existe donc deux seulement dont les valeurs le long de C soient infiniment voisines de $\frac{2k+1}{2}\pi$: ce sont les deux branches u_{2k} et u_{2k+1}, dont la valeur limite est $\frac{2k+1}{2}\pi$.

Cela posé, soit z_0 un point de C; la valeur de u_{2k}, par

exemple, au point z_0 sera l'une des valeurs que l'expression

$$(21) \qquad \frac{1}{i}\log(iz + \varepsilon\sqrt{1 - z^2})$$

prend pour $z = z_0$, ε étant égal à ± 1.

Lorsque z décrira le contour C, cette expression restant infiniment voisine de $\frac{2k+1}{2}\pi$, sa valeur finale coïncidera avec la valeur au point z_0 de l'axe des deux fonctions u_{2k}, u_{2k+1}.

Mais le premier cas ne peut se présenter. En effet, pendant ce mouvement, l'argument de $1 + z$ change infiniment peu et reprend au retour sa valeur primitive; celui de $1 - z$ varie, au contraire, de 2π; celui du produit $1 - z^2$ variera donc de 2π et le radical $\sqrt{1 - z^2} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ se reproduira, multiplié par $e^{\frac{1}{2}2\pi i} = -1$. Donc, lorsque z reviendra à la valeur z_0, la valeur finale de la fonction sera l'une des valeurs de l'expression

$$\frac{1}{i}\log(iz_0 - \varepsilon\sqrt{1 - z_0^2}),$$

lesquelles sont toutes différentes des valeurs de l'expression

$$\frac{1}{i}\log(iz_0 + \varepsilon\sqrt{1 - z_0^2}),$$

parmi lesquelles est comprise la valeur initiale. Donc, en décrivant le contour, on changera la valeur de u et l'on passera ainsi de la branche u_{2k} à une autre branche, qui ne peut être que u_{2k+1}.

248. La fonction $\operatorname{arc}\cos z$ inverse du cosinus, définie par l'équation

$$\cos u = z,$$

ne nécessite aucune étude nouvelle; en effet, $\cos u$ étant égal

à $\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$, on aura

$$\operatorname{arc}\cos z = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\sin z.$$

Cette expression admet, pour chaque valeur de z, une infinité de valeurs données par les formules

$$\cos z = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\pi}{2}+a+2k\pi \\ \frac{\pi}{2}-a+2k\pi \end{array} \right\} = \pm b + 2k\pi,$$

en posant $\frac{\pi}{2} - a = b$.

CHAPITRE III.

SÉRIES.

I. — Formule de Taylor.

249. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, qui reste continue, ainsi que ses n premières dérivées, dans un intervalle AA'.

Désignant par a et $a+h$ deux points de cet intervalle, posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n. \end{aligned}\right.$$

Le *reste* R_n sera une nouvelle fonction de h que nous allons déterminer.

En prenant les dérivées successives de (1) par rapport à h, on voit : 1° que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de R_n est égale à $f^n(a+h)$; 2° que R_n et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h=0$.

Ces deux conditions suffisent à définir complètement R_n; car, si φ est une fonction qui y satisfasse, la différence $R_n-\varphi$, ayant sa dérivée $n^{\text{ième}}$ nulle, sera un polynôme entier d'ordre $n-1$, mais ce polynôme et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h=0$; il est donc identiquement nul.

Or on peut vérifier immédiatement que l'intégrale définie

$$I = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1}f^n(x)\,dx$$

satisfait aux conditions précédentes.

Pour le montrer, posons d'abord $x = a + t$; il viendra

$$I = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}f^n(a+t)\,dt.$$

Cherchons la dérivée de cette intégrale. On voit que h figure dans I à la fois comme limite et comme paramètre. Il faut donc appliquer la règle de dérivation des fonctions composées. Mais la fonction à intégrer s'annule pour $t = h$; donc la dérivée par rapport à la limite est nulle et il reste simplement le terme provenant de la dérivation par rapport au paramètre

$$\frac{dI}{dh} = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^h (h-t)^{n-2}f^n(a+t)\,dt.$$

On trouvera de même

$$\frac{d^2I}{dh^2} = \frac{1}{(n-3)!}\int_0^h (h-t)^{n-3}f^n(a+t)\,dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^{n-1}I}{dh^{n-1}} = \int_0^h f^n(a+t)\,dt.$$

Toutes ces expressions s'annulent pour $h = 0$. Enfin, une dernière dérivation donnera

$$\frac{d^nI}{dh^n} = f^n(a+h).$$

Nous trouvons ainsi pour R_n l'expression suivante

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}f^n(a+t)\,dt.$$

Posons $t = uh$; u variera de 0 à 1, et l'on aura

$$(2) \qquad R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^n(a+uh)\,du.$$

250. Soit p un entier positif arbitraire non supérieur à n; la fonction à intégrer sera le produit des deux facteurs

$$(1-u)^{p-1} \quad \text{et} \quad (1-u)^{n-p} f^n(a+uh),$$

dont le premier est positif et le second continu dans le champ d'intégration. On aura donc, en appliquant le théorème de la moyenne,

$$R_n = h^n \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{p-1}\,du,$$

θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. D'ailleurs

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1}\,du = \left[-\frac{(1-u)^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p}.$$

Donc

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!\,p},$$

et, en particulier, si nous prenons $p = n$,

$$(3) \qquad R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h).$$

251. La formule (1) est connue sous le nom de *formule de Taylor*. L'expression (3) du reste, donnée par Lagrange, est parfois commode; elle a toutefois l'inconvénient de contenir un nombre inconnu θ, dont on sait seulement qu'il est compris entre 0 et 1. L'expression (2), qui ne contient rien d'indéterminé, est à cet égard préférable.

Si l'on suppose n constant et h infiniment petit, les formules (2) et (3) montrent que R_n est infiniment petit, d'ordre n au moins. On aura donc, pour l'infiniment petit

$f(a+h)-f(a)$, la valeur

$$hf'a+\frac{h^2}{1.2}f''a+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a$$

approchée aux infiniment près de l'ordre n.

Supposons, au contraire, h constant ou assujetti à rester entre certaines limites et n croissant indéfiniment. Si l'on peut démontrer que dans ces conditions R_n tend vers zéro, on aura, à la limite,

$$f(a+h)=\lim\left[fa+hf'a+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a\right].$$

On dira, dans ce cas, que *la série infinie*

$$f(a)+hf'a+\frac{h^2}{1.2}f''a+\ldots$$

converge vers $f(a+h)$, ou a cette quantité pour *somme*.

252. Posons, dans la formule de Taylor, $a=0$, $h=x$; nous obtiendrons la *formule de Maclaurin*

$$(4)\quad f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+R_n,$$

où R_n peut être mis sous les formes suivantes

$$R_n=\frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-u)^{n-1}f^n(ux)\,du,\qquad R_n=\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x).$$

Cette formule suppose que la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues dans un intervalle comprenant à son intérieur les points 0 et x.

253. On peut aisément étendre la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

Soit, en effet, $f(x,y)$ une fonction des variables réelles x, y, dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n restent continues tant que x est compris entre A et A', et y entre B

et B'. Soient a, $a+h$ deux nombres compris entre A et A', b, $b+k$ deux nombres compris entre B et B'.

Posons $\alpha = a + ht$, $\beta = b + kt$. L'expression

$$f(\alpha, \beta) = f(a+ht, b+kt) = \varphi(t),$$

considérée comme fonction de t, aura des dérivées

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial \alpha} + k\frac{\partial f}{\partial \beta} = \left(h\frac{\partial}{\partial \alpha} + k\frac{\partial}{\partial \beta}\right)f = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)f,$$

$$\varphi''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)\varphi'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^2 f,$$

Ces dérivées seront continues tant que $a+ht$ sera compris entre A et A', et $b+kt$ entre B et B', et *a fortiori* quand t variera de o à 1.

Appliquant à cette fonction la formule de Maclaurin et posant $t=1$ dans l'équation obtenue, nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right) f(a,b) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{(n-1)!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a,b) + R_n, \end{cases}$$

R_n pouvant être mis sous l'une des formes suivantes

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+hu, b+ku)\,du,$$

$$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k).$$

254. En posant $f(a,b) = y$, $f(a+h, b+k) = y + \Delta y$, cette formule prendra la forme plus simple

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + R_n,$$

laquelle subsisterait évidemment pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Si h et k sont des infiniment petits de premier ordre, R_n

sera un infiniment petit d'ordre n au moins, et pourra être supprimé de la formule, si l'on veut borner l'approximation à cet ordre de grandeur.

255. Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux fonctions de variables complexes.

Soit $f(z)$ une fonction de z, synectique tant que cette variable reste dans l'intérieur d'un domaine E. Soit L une ligne rectifiable située dans l'intérieur de ce domaine et joignant les points a, $a+h$. On verra, par un raisonnement identique à celui du n° **249**, qu'on a

$$f(a+h) = fa + hf'a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}a + \mathrm{R}_n,$$

le reste R_n étant donné par l'intégrale

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{\mathrm{L}} [a+h-z]^{n-1} f^n(z)\,dz.$$

Si la droite qui joint les points a et $a+h$ est tout entière comprise dans l'intérieur de E, on pourra la prendre pour ligne d'intégration; sa longueur sera $|h|$. D'autre part, $|a+h-z|$ variera de $|h|$ à o. Si donc μ est le maximum de $|f^n(z)|$ sur cette ligne, on aura

$$|\mathrm{R}_n| \overline{\leq} \frac{\mu |h|^n}{(n-1)!}.$$

Cette hypothèse se réalisera toujours si l'on admet qu'on puisse tracer du point a comme centre un cercle K contenant le point $a+h$ dans son intérieur, et tel que tous les points non extérieurs à ce cercle soient intérieurs à E.

256. On peut aisément établir que, dans ce cas, R_n tend vers zéro lorsque n tend vers ∞.

En effet, $f'(z)$ étant continue dans l'intérieur de E, son module le long du cercle K ne pourra surpasser un certain maximum M'; soient ρ le rayon du cercle, δ la distance du point z au point a, laquelle varie de o à $|h|$. Sa distance

au cercle K sera $\rho - \delta$, et $f^n(z)$ étant la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $f'(z)$, on aura, d'après la formule du nº 205,

$$|f^n(z)| \overline{\gtrless} \frac{(n-1)!\,M'}{(\rho-\delta)^{n-1}}.$$

D'autre part,

$$|a+h-z| = |h| - \delta.$$

Donc

$$\begin{aligned}|a+h-z|^{n-1}\,|f^n z| &\overline{\gtrless} \left(\frac{|h|-\delta}{\rho-\delta}\right)^{n-1}(n-1)!\,M'\\ &\overline{\gtrless} \left(\frac{|h|}{\rho}\right)^{n-1}(n-1)!\,M';\end{aligned}$$

car le maximum de $\dfrac{|h|-\delta}{\rho-\delta}$ correspond évidemment à $\delta = 0$.

On aura donc, $|h|$ étant la longueur de la ligne L,

$$|R_n| \overline{\gtrless} \left(\frac{|h|}{\rho}\right)^{n-1} M'|h|,$$

et comme $|h| < \rho$, cette expression tend vers zéro pour $n=\infty$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

La série infinie

$$fa + hf'a + \frac{h^2}{1.2}f''a + \dots$$

est convergente et a pour somme $f(a+h)$ tant que le point $a+h$ restera intérieur à un cercle K *ayant son centre en a et qui soit entièrement intérieur à* E.

En posant, en particulier, $a=0$, $h=z$, on aura la formule de Maclaurin, qui, pour $n=\infty$, donnera une série convergente dans les mêmes conditions.

257. Le théorème établi dans le numéro précédent peut être démontré par une autre voie, qui donne une nouvelle expression du reste.

Les points a et $a+h$ étant contenus dans le cercle K, où la fonction $f(z)$ est synectique, on aura

$$fa = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \qquad \ldots, \qquad f^{n-1}a = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n},$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz\left[\frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{h^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{h^n}{(z-a)^n(z-a-h)}\right] \\ &= fa + hf'a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a + \mathrm{R}_n, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{h^n f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-a-h)}.$$

Soient ρ le rayon du cercle K, M le maximum de $f(z)$ sur ce cercle; on aura

$$|\mathrm{R}_n| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{|h|}{\rho}\right)^n \frac{\mathrm{M}}{\rho - |h|}\, 2\pi\rho,$$

quantité qui tend vers zéro pour $n = \infty$.

258. L'extension aux fonctions de plusieurs variables ne souffre aucune difficulté.

Soit, par exemple, une fonction $f(z, u)$ de deux variables qui reste synectique tant que z ne sort pas d'un cercle K de rayon r ayant son centre en a, ni u d'un cercle K_1 de rayon r_1 ayant son centre en b. Soient $a+h$ un point intérieur à K, $b+k$ un point intérieur à K_1, enfin ρ une quantité > 1 mais qui ne surpasse ni $\frac{r}{|h|}$ ni $\frac{r_1}{|k|}$. L'expression

$$f(a+ht,\ b+kt)$$

sera une fonction de t, synectique tant que t ne sortira pas d'un cercle de rayon ρ. On peut donc la développer, pour

$t = 1$, par la formule de Maclaurin. Le résultat sera identique à celui du n° 253, et le reste R_n tendra vers zéro pour $n = \infty$.

259. Appliquons la formule de Maclaurin à quelques fonctions simples.

La fonction e^z a toutes ses dérivées successives égales à e^z. Pour $z = 0$, elles se réduisent à l'unité. On aura donc le développement

$$(6) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

qui sera toujours convergent, quel que soit z, car e^z est synectique dans tout le plan.

Posant $z = 1$ dans cette formule, nous trouverons la valeur de la constante e

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots.$$

Changeant z en iz, puis en $-iz$ et combinant les formules obtenues, il viendra

$$(7) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$(8) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

séries également convergentes dans tout le plan.

260. Considérons la fonction $u = (1+z)^m$, et, pour préciser, dans le cas où m n'est pas un entier réel, celle des branches de cette fonction qui se réduit à 1 pour $z = 0$. On aura

$$u = (1+z)^m, \qquad u' = m(1+z)^{m-1},$$
$$u^n = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+z)^{m-n},$$

Pour $z = 0$, ces expressions se réduiront à

$$1, \quad m, \quad m(m-1), \quad \ldots, \quad m(m-1)\ldots(m-n+1),$$

Substituant ces valeurs dans le développement de Maclau-

rin, on obtient la formule du binôme

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} (1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2} z^2 + \ldots \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^n + \ldots . \end{aligned} \right.$$

La fonction $(1+z)^m$ n'ayant qu'un point critique, $z = -1$, la série ci-dessus sera convergente tant que $|z| < 1$. Car, si cette condition est satisfaite, soit ρ une quantité comprise entre $|z|$ et l'unité. La fonction sera synectique dans un cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, et le point z lui est intérieur.

Au contraire, si $|z| > 1$, la série ne sera pas convergente. Il faudrait, en effet, pour qu'elle le fût, que la somme S_n de ses n premiers termes tendît pour $n = \infty$ vers une limite fixe et, par suite, que $S_{n+1} - S_n$ tendît vers zéro. Or cette différence est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série. Ces termes devraient donc tendre vers zéro pour $n = \infty$, ce qui n'a pas lieu, car leur module augmente au contraire avec n dès que n est suffisamment grand. En effet, le rapport du terme général

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^n$$

au précédent est

$$\frac{m-n+1}{n} z,$$

et, quand n tend vers ∞, le module de ce rapport tend vers $|z|$, quantité > 1.

261. Passons à la fonction $u = \log(1+z)$. Ses dérivées successives sont

$$u' = (1+z)^{-1}, \qquad u'' = -(1+z)^{-2}, \qquad \ldots,$$
$$u^n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+z)^{-n}.$$

Pour $z = 0$, elles se réduisent respectivement à

$$1, \quad -1, \quad \ldots, \quad (-1)^{n-1}(n-1)!$$

On aura donc, en adoptant celle des branches du logarithme qui s'annule pour $z = 0$,

$$(10) \qquad \log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \ldots.$$

Par les mêmes raisons que pour la formule du binôme, ce développement sera convergent si $|z| < 1$, divergent si $|z| > 1$.

En changeant z en $-z$, nous trouvons

$$\log(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{z^n}{n} - \ldots$$

et en retranchant

$$\log \frac{1 + z}{1 - z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right).$$

Posons

$$z = \frac{x}{2a + x},$$

a et x étant deux nombres réels et positifs; il viendra

$$\begin{aligned} \log \frac{a + x}{a} &= \log(a + x) - \log a \\ &= 2\left[\frac{x}{2a + x} + \frac{x^3}{3(2a + x)^3} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

C'est sur cette formule et sur la suivante

$$\log x + \log y = \log xy,$$

qu'est fondé le calcul des Tables de logarithmes.

En posant $a = 1$, $x = 1$, on aura tout d'abord

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right).$$

Posant ensuite $a = 125$, $z = 3$, il viendra

$$\log 128 - \log 125 = 2\left(\frac{3}{253} + \ldots\right),$$

et, comme $\log 128 = \log 2^7 = 7 \log 2$, $\log 125 = 3 \log 5$, cette équation donnera $\log 5$.

On trouvera de même $\log 3$ par l'équation

$$4\log 3 - 4\log 2 - \log 5 = \log 81 - \log 80 = 2\left(\frac{1}{161} + \ldots\right),$$

puis $\log 7$ par l'équation

$$\begin{aligned} 4\log 7 - 5\log 2 - \log 3 - 2\log 5 &= \log 7^4 - \log(7^4 - 1) \\ &= \left(\frac{1}{2.7^4 - 1} + \ldots\right), \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres nombres premiers. Une simple addition donnera ensuite les logarithmes des nombres composés.

Les logarithmes ainsi calculés sont népériens. Pour obtenir les logarithmes vulgaires, on devra les multiplier par le facteur

$$\frac{1}{\log 10} = 0,43429448\ldots.$$

262. Nous avons trouvé (**244**) la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} z &= \frac{1}{2i}[\log(i - z) \ - \log(i + z) \ - 2k\pi i] \\ &= \frac{1}{2i}[\log(1 + iz) - \log(1 - iz) - 2k\pi i]. \end{aligned}$$

Développant les logarithmes par la formule précédente, on aura pour celle des branches de l'arc tangente qui s'annule pour $z = 0$

$$\operatorname{arc\,tang} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots.$$

Ce développement sera encore convergent si $|z| < 1$, divergent si $|z| > 1$.

Il donne un procédé commode pour le calcul numérique du nombre π. On calcule d'abord l'arc φ qui a pour tangente $\frac{1}{5}$. La formule donnera

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \ldots.$$

On aura ensuite

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4\varphi = \frac{2 \operatorname{tang} 2\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 2\varphi} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tang}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tang} 4\varphi} = \frac{1}{239},$$

d'où

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots,$$

équation qui donnera π.

263. Considérons enfin la fonction $u = \arcsin z$. Chacune de ses branches sera synectique dans tout cercle qui laisse à son extérieur les deux points critiques $+1$ et -1. On pourra donc la développer par la formule de Maclaurin en une série convergente, si $|z| < 1$.

Choisissons en particulier celle de ses branches qui s'annule avec z. On aura pour $z = 0$

$$u = 0, \qquad u' = 1$$

et, d'après le n° **162**,

$$u^{(2n)} = 0, \qquad u^{(2n-1)} = 1^2.3^2.\ldots(2n-1)^2.$$

Substituant ces valeurs des dérivées dans la formule de Maclaurin, il vient

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots.$$

Si $|z| > 1$, cette série sera divergente, car le rapport du terme général au précédent est égal à

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} z,$$

quantité dont le module tend, pour $n = \infty$, vers $|z|$ qui est supposé > 1.

II. — Procédés pour effectuer les développements en séries.

264. Soient x un infiniment petit, $y = f(x)$ une quantité qui en dépend. Proposons-nous d'en déterminer une valeur approchée, de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots + Mx^{\mu}$$

et qui ne diffère de la véritable que d'un infiniment petit d'ordre n au moins.

Si $f^n(x)$ est continue aux environs de $x = 0$, la formule de Maclaurin résoudra la question. Elle donne, en effet,

$$y = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)} + R_n,$$

R_n étant d'ordre $\overline{\gtrless} n$ et, par suite, négligeable. Mais cette méthode exige le calcul des dérivées successives de $f(x)$, qui peut être fort pénible. Elle est d'ailleurs inapplicable si $f^n(x)$ n'est pas continue aux environs de $x = 0$. Il convient donc d'indiquer d'autres procédés.

265. Si $y = u + v + \ldots$, la valeur approchée de y sera évidemment la somme des valeurs approchées des fonctions partielles u, v, ...

Si l'on veut se borner à calculer la valeur principale de y, on ne conservera, parmi les fonctions u, v, ..., que celles dont l'ordre est le moins élevé; on calculera leurs valeurs principales et on les ajoutera ensemble.

Si toutefois ces valeurs principales avaient une somme nulle, ce serait une preuve que l'approximation est insuffisante; il faudrait donc recommencer le calcul en prenant un terme de plus dans le développement de chacune des quantités u, v, ...

Soit, par exemple,

$$y = 2\sin x - \sin 2x + x^3.$$

Les quantités $2\sin x$ et $-\sin 2x$ sont du premier ordre; mais la somme de leurs valeurs principales est nulle. Poussant donc l'approximation plus loin, on posera

$$2\sin x = 2x - \frac{2x^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

d'où

$$y = x^3(-\tfrac{2}{6} + \tfrac{8}{6} + 1) + \ldots = 2x^3 + \ldots.$$

266. Si $y = uv$, u et v étant respectivement d'ordre α et β, on aura sa valeur approchée en multipliant ensemble les valeurs approchées des quantités u et v et négligeant dans ce produit les termes d'ordre $\overline{\gtrless} n$. Il suffira évidemment de pousser l'approximation de u jusqu'aux termes d'ordre $n-\beta$, celle de v jusqu'aux termes d'ordre $n-\alpha$.

Le premier terme de l'expression de y, qui constitue sa valeur principale, est évidemment le produit des valeurs principales de u et de v.

267. Si $y = \frac{u}{v}$, soient

$$u_1 = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots,$$
$$v_1 = Bx^\beta + B'x^{\beta'} + \ldots$$

des valeurs approchées de u et de v, et soient

$$u = u_1 + R, \qquad v = v_1 + S.$$

On aura

$$\frac{u}{v} - \frac{u_1}{v_1} = \frac{uv_1 - vu_1}{vv_1} = \frac{Rv_1 - Su_1}{vv_1};$$

v et v_1 étant d'ordre β, et u_1 d'ordre α, cette expression sera d'ordre $\overline{\gtrless} n$ si l'ordre de R est $\overline{\gtrless} n + \beta$, et si celui de S est $\overline{\gtrless} n - \alpha + 2\beta$.

On aura alors, dans les limites d'approximation demandées,

$$y = \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Cela posé, on effectuera la division de u_1 par v_1 jusqu'au moment où l'on introduirait au quotient des termes de degré $\overline{\overline{>}} n$.

Soient $q = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots$ le quotient de la division, T le reste; on aura

$$y = \frac{u_1}{v_1} = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots + \frac{T}{v_1}.$$

Le premier terme du quotient $\frac{T}{v_1}$ étant, par hypothèse, d'ordre $\overline{\overline{>}} n$, $\frac{T}{v_1}$ sera d'ordre $\overline{\overline{>}} n$ et pourra être négligé.

On aura donc

$$y = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots$$

avec l'approximation demandée.

Le premier terme de ce développement Cx^γ, qui est la valeur principale de y, sera évidemment le quotient des termes Ax^α, Bx^β, valeurs principales de u et de v.

Si $\beta > \alpha$, les premiers termes de la suite γ, γ', ... seront négatifs. Dans ce cas, la formule de Maclaurin n'aurait pas été applicable à la fonction y, car cette fonction, devenant infinie pour $x = 0$, serait discontinue, et ses dérivées également.

268. Au lieu d'effectuer la division de u_1 par v_1, on aurait pu, ce qui est au fond la même chose, poser

$$y = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots,$$

C, C', ..., γ, γ', ... étant des coefficients indéterminés.

Cela posé, l'équation $y = \frac{u_1}{v_1}$ pourrait s'écrire

$$yv_1 = u_1$$

ou

$$(Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots)(Bx^\beta + B'x^{\beta'} + \ldots) = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots.$$

ou, en développant les calculs dans le premier membre,

$$BC x^{\beta+\gamma} + \ldots = A x^{\alpha} + A' x^{\alpha'} + \ldots.$$

En exprimant l'identité des termes du second membre de cette équation avec les termes correspondants du premier membre, on obtiendra une série d'équations de condition qui détermineront C, γ, ...

Ainsi, par exemple, les premiers termes

$$BC x^{\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad A x^{\alpha}$$

devant être identiques, on aura

$$\beta + \gamma = \alpha,$$
$$BC = A,$$

d'où

$$\gamma = \alpha - \beta, \qquad C = \frac{A}{B}.$$

269. Comme application de cette méthode, proposons-nous de calculer les premiers termes du développement en série de l'expression

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

Cette fonction ne changeant pas quand x change de signe, le développement ne contiendra que des puissances paires. Posons donc

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = A + B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + B_3 \frac{x^6}{1.2\ldots6} - \ldots;$$

il viendra, en chassant les dénominateurs et remplaçant e^x par son développement,

$$\frac{x}{2}\left(2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right)$$
$$= \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right)\left(A + B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right).$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on trouvera

$$1 = A, \qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots n} = \frac{A}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{B_1}{1.2\ldots1.2\ldots(n-1)} - \frac{B_2}{1.2.3.4\ldots1.2\ldots(n-3)} + \ldots,$$

équations qui détermineront successivement A, B_1, B_2, ... On aura même deux équations pour calculer chacune des quantités B. On trouve ainsi

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1}{30}, \qquad B_5 = \frac{5}{66}, \qquad B_6 = \frac{691}{2730},$$

270. Les nombres B_1, B_2, ... portent le nom de *nombres de Bernoulli*. Ils se rencontrent dans une foule de questions d'Analyse. Ils ont, en particulier, une liaison intime avec les sommes de puissances des nombres entiers.

Pour établir cette relation, posons

$$y = e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x}.$$

On aura

$$y^{(\alpha)} = 1^\alpha e^x + 2^\alpha e^{2x} + \ldots + (n-1)^\alpha e^{(n-1)x}$$

et pour $x = 0$

$$(y^{(\alpha)})_0 = 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha.$$

Mais on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{e^{nx}-1}{x}\,\frac{x}{e^x-1} \\ &= \frac{nx + \dfrac{n^2x^2}{1.2} + \ldots}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1x^2}{1.2} - \frac{B_2x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) \\ &= A_0 + A_1x + \ldots + A_\alpha x^\alpha + \ldots, \end{aligned}$$

en posant

$$A_\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{1.2\ldots(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{n^\alpha}{1.2\ldots\alpha} + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{n^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} - \ldots.$$

On aura donc

$$1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha = (y^{(\alpha)})_0 = 1.2\ldots\alpha A_\alpha$$
$$= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{2}n^\alpha + \frac{B_1}{1.2}\alpha n^{\alpha-1} - \frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)n^{\alpha-3} + \ldots.$$

271. Soient $y = \sqrt{u}$ et $u = u_1 + R$,

$$u_1 = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots$$

étant une valeur approchée de u. On aura

$$\sqrt{u} - \sqrt{u_1} = \frac{u - u_1}{\sqrt{u} + \sqrt{u_1}} = \frac{R}{\sqrt{u} + \sqrt{u_1}}.$$

Le dénominateur de cette expression étant d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, elle sera négligeable si l'ordre de R est $\overline{\gtrless} n + \frac{\alpha}{2}$.

Si donc u_1 a été calculé avec cette approximation, on pourra poser

$$y = \sqrt{u_1}$$

et y pourra se calculer en extrayant la racine carrée de u_1 jusqu'aux termes de l'ordre n. En effet, soit q la racine ainsi obtenue. On aura

$$\sqrt{u_1} - q = \frac{u_1 - q^2}{\sqrt{u_1} + q},$$

quantité négligeable, car $\sqrt{u_1}$ et q sont d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $u_1 - q^2$ d'ordre $\overline{\gtrless} n + \frac{\alpha}{2}$; en effet, le terme suivant de la racine carrée, lequel s'obtiendrait, d'après la règle connue, en divisant le premier terme de $u_1 - q^2$ par le double du premier terme de q, lequel est d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, serait d'ordre $\overline{\gtrless} n$ par hypothèse.

On aura donc, avec l'approximation demandée,

$$y = q.$$

On aurait pu également employer la méthode des coefficients indéterminés, en posant

$$y = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots$$

et déterminant $C, C', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots$ de manière à rendre identique l'équation

$$(Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots)^2 = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha'} + \ldots.$$

272. Soit, plus généralement,

$$y = u^m,$$

m étant fractionnaire ou incommensurable.

Posons $u = u_1 + v$, u_1 désignant sa valeur principale. On aura, par la formule du binôme,

$$y = u_1^m + m u_1^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u_1^{m-2} v^2 + \ldots + R.$$

Connaissant les ordres respectifs de u_1 et de v, on verra aisément combien il faut prendre de termes dans la formule pour que R soit d'ordre n, et par suite négligeable. Cela fait, on n'aura plus qu'à calculer v avec une approximation suffisante, et l'on en déduira aisément v^2, v^3, . . .

273. Proposons-nous, comme application, de développer le radical

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances croissantes de α.

Cette expression peut s'écrire

$$[1 - \alpha(2x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha(2x - \alpha) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\,\frac{\alpha^m(2x-\alpha)^m}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

Il ne restera plus qu'à développer les puissances du binôme $2x - \alpha$ et à réunir ensemble les termes qui contiennent une même puissance de α. On obtiendra ainsi un développement de la forme

$$1 + X_1\alpha + \ldots + X_n\alpha^n + \ldots,$$

où X_n désigne un polynôme en x dont nous allons déterminer la forme.

Le terme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\,\frac{\alpha^m(2x-\alpha)^m}{1.2\ldots m}$$

ne fournira évidemment de terme en α^n que si m est $\overline{\gtrless}\,\frac{n}{2}$, mais $\overline{\lessgtr}\, n$. S'il est compris entre ces limites, il donnera le terme

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.1.2\ldots m}\,\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots(n-m).1.2\ldots(2m-n)}(2x)^{2m-n}(-1)^{n-m}\alpha^n$$
$$= \frac{1.3\ldots(2m-1)2^{m-n}(-1)^{n-m}}{1.2\ldots(n-m).1.2\ldots 2m}\,\frac{d^n x^{2m}}{dx^n}\alpha^n.$$

Mais on a

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots 2m} = \frac{1}{2.4\ldots 2m} = \frac{1}{2^m.1.2\ldots m}.$$

Le terme précédent pourra donc s'écrire

$$\frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^{n-m}\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}x^{2m}\right]\alpha^n,$$

et l'on aura, par suite, en ajoutant tous les termes en α^n,

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum_m\left[(-1)^{n-m}\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}x^{2m}\right].$$

On peut d'ailleurs sans inconvénient étendre la sommation aux valeurs de m qui sont moindres que $\frac{n}{2}$, les termes ainsi ajoutés ayant une dérivée $n^{\text{ième}}$ nulle. La somme entre paren-

thèses deviendra égale à $(x^2 - 1)^n$. On aura donc, comme résultat final,

$$X_n = \frac{1}{2^n . 1 . 2 \ldots n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Les expressions X_n sont connues sous le nom de *polynômes de Legendre*. Elles jouissent de propriétés remarquables, et nous aurons plusieurs fois l'occasion de les retrouver.

274. L'expression $y = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ satisfaisant, comme nous l'avons vu (**165**), à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) y'' + 2xy' - n(n+1) y = 0,$$

et X_n n'en différant que par un facteur constant, on aura évidemment

$$(x^2 - 1) X_n'' + 2xX_n' - n(n+1) X_n = 0.$$

275. Trois polynômes successifs X_{n-1}, X_n, X_{n+1} sont liés par une relation linéaire que nous allons établir.

Prenons la dérivée par rapport à α de l'équation

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 \alpha + \ldots + X_n \alpha^n + \ldots;$$

il viendra

$$(x - \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = X_1 + \ldots + nX_n \alpha^{n-1} + \ldots.$$

Multipliant par $1 - 2\alpha x + \alpha^2$ et remplaçant ensuite

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

par sa valeur, nous trouverons

$$\begin{aligned} &(x - \alpha)(1 + X_1 \alpha + \ldots + X_n \alpha^n + \ldots) \\ &\quad = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)(X_1 + \ldots + nX_n \alpha^{n-1} + \ldots), \end{aligned}$$

d'où, en égalant les coefficients de α^n,

$$xX_n - X_{n-1} = (n+1) X_{n+1} - 2nxX_n + (n-1) X_{n-1},$$

ou enfin

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

276. D'après les définitions que nous avons données, une quantité y, dépendant d'un infiniment petit (ou infiniment grand) x, est d'ordre α si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque x tend vers o (ou vers ∞). Mais ce serait une erreur de croire que l'ordre d'infinitude d'une fonction quelconque de x soit toujours susceptible d'une semblable évaluation numérique, ainsi que cela avait lieu dans les exemples précédents.

Considérons, par exemple, la fonction $y = e^x$. On a, comme nous l'avons vu,

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

et, par suite, si $x > 0$,

$$y > \frac{x^m}{1.2\ldots m},$$

m étant un entier quelconque. On aura donc

$$\frac{y}{x^\alpha} > \frac{x^{m-\alpha}}{1.2\ldots m}.$$

Prenons $m > \alpha$ et faisons tendre x vers ∞. On aura

$$\lim \frac{y}{x^\alpha} \geqq \lim \frac{x^{m-\alpha}}{1.2\ldots m} = \infty.$$

On voit donc que, si x tend vers $+\infty$, e^x tendra également vers $+\infty$, et cela *plus rapidement qu'une puissance quelconque de x.*

277. L'équation

$$y = e^x$$

donne, en supposant x réel et prenant les logarithmes arithmétiques,

$$x = \operatorname{Log} y.$$

Donc, si $\operatorname{Log} y$ tend vers $+\infty$, il en sera de même de y, qui croîtra plus rapidement qu'une puissance quelconque de $\operatorname{Log} y$.

Donc, réciproquement, si y tend vers $+\infty$, $\operatorname{Log} y$ tendra vers $+\infty$, mais moins rapidement qu'une puissance quelconque de y.

Posons

$$y = \frac{1}{z},$$

d'où

$$\operatorname{Log} y = -\operatorname{Log} z.$$

Si y tend vers $+\infty$, z tendra vers 0 et $\operatorname{Log} z$ tendra vers $-\infty$, mais moins rapidement qu'une puissance quelconque de $\frac{1}{z}$, prise avec le signe $-$.

Donc, pour x infiniment petit (ou infiniment grand), $\operatorname{Log} x$ sera un infiniment grand négatif (ou positif), mais dont l'ordre est inférieur à toute limite. Il ne saurait donc être question de lui assigner une valeur principale de la forme Ax^{α}. C'est un infini d'une espèce particulière et irréductible à ceux que nous avons considérés jusqu'ici.

278. Soit maintenant $u = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots + R$ une fonction quelconque développable suivant les puissances de x. Proposons-nous de développer $\log u$.

On aura évidemment

$$\log u = \alpha \log x + \log A + \log\left(1 + \frac{Bx^{\beta-\alpha} + \ldots + Rx^{-\alpha}}{A}\right).$$

Le dernier terme de cette expression sera développable au moyen de la formule qui donne $\log(1+x)$. Mais le terme $\alpha \log x$ par lequel commence le développement de $\log u$ sera irréductible avec ceux qui le suivent.

279. Les divers développements que nous avons obtenus, étant limités à un certain nombre de termes, donneront toujours une valeur approchée de la fonction qu'on développe lorsque x sera suffisamment petit (ou suffisamment grand si les puissances de x vont en décroissant).

En les prolongeant indéfiniment, on obtiendra des séries

infinies. Si ces séries sont divergentes, elles n'ont aucun sens. Mais Cauchy a signalé ce fait remarquable que, même en étant convergentes, elles peuvent ne pas être égales à la fonction qui leur donne naissance.

Considérons, à cet effet, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Ses dérivées successives sont une somme de termes de la forme $\frac{a}{x^\alpha} e^{-\frac{1}{x}}$. Cela se voit immédiatement sur la dérivée première, et l'on vérifie non moins facilement que la dérivée d'un semblable terme se compose de deux termes de cette forme.

Ces dérivées s'annulent toutes pour $x = 0$, car, en posant $\frac{1}{x} = z$, on aura

$$\frac{a}{x^\alpha} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{a z^\alpha}{e^z},$$

quantité dont la limite est nulle pour $x = 0$, d'où $z = \infty$.

La série de Maclaurin

$$f(0) + x f'(0) + \ldots,$$

prolongée indéfiniment, sera donc convergente, tous ses termes étant nuls. Mais elle est égale à zéro et non à $f(x)$.

Il est donc nécessaire, pour reconnaître si une fonction est développable en série infinie par la formule de Maclaurin, d'étudier le reste R_n et de s'assurer qu'il tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. C'est ainsi que nous avons procédé pour développer $(1 + x)^m$, $\log(1 + x)$, ...

280. Soit $f(x)$ une fonction qui devienne indéterminée pour une valeur particulière a de la variable. On nomme *vraie valeur* de cette fonction pour $x = a$ la limite vers laquelle tend $f(a + h)$ lorsque h tend vers zéro. Cette vraie valeur peut être finie, infinie ou indéterminée. Si elle est déterminée, elle se trouvera en cherchant la valeur principale du développement de $f(a + h)$ suivant les puissances croissantes de h.

Soit, par exemple, $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, φ et ψ s'annulant pour $x = a$, mais étant développables par la série de Taylor; on aura

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a) + \mathrm{R}}{\psi(a) + h\psi'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(a) + \rho}$$

Soient respectivement $\varphi^p(a)$ et $\psi^q(a)$ les premiers termes qui ne s'annulent pas dans les deux suites

$$\varphi(a),\ \varphi'(a),\ \ldots \quad \text{et} \quad \psi(a),\ \psi'(a),\ \ldots.$$

La vraie valeur sera la limite de

$$\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots p} h^{p-q} \frac{\varphi^p(a)}{\psi^q(a)}.$$

Elle sera nulle si $p > q$, infinie si $p < q$, égale à $\frac{\varphi^p(a)}{\psi^p(a)}$ si $p = q$.

281. Si $f(x)$ devenait indéterminée pour $x = \infty$, on développerait $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x; et la vraie valeur serait nulle, finie ou infinie, suivant que l'ordre du premier terme du développement serait négatif, nul ou positif.

282. *Exemples.* — 1° Soit à déterminer la vraie valeur de

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$$

pour $m = \infty$.

Cette expression est, par définition, égale à

$$e^{m \operatorname{Log}\left(1+\frac{z}{m}\right)} = e^{m\left(2k\pi i + \frac{z}{m} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2} + \ldots\right)}$$
$$= e^{2mk\pi i} e^z e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{m} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{m^2} - \ldots},$$

k étant un entier qui dépend de la branche de logarithme que l'on aura choisie.

Le dernier facteur tend évidemment vers $e^0 = 1$. Si donc on choisit la branche pour laquelle $k = 0$, d'où $e^{2mk\pi i} = 1$, on aura une vraie valeur, égale à e^z.

Pour les autres branches du logarithme, la vraie valeur sera entièrement indéterminée, tant que m ne sera assujetti qu'à la seule condition de tendre vers ∞. En effet, soit μ une quantité quelconque; si l'on pose $m = \frac{2n\pi i + \operatorname{Log}\mu}{2k\pi i}$, n étant un entier qui tend vers ∞, m tendra également vers ∞, et $e^{2mk\pi i}$ sera égal à $e^{\operatorname{Log}\mu} = \mu$.

2° Cherchons la vraie valeur de

$$m\left(\sqrt[m]{z} - 1\right)$$

pour $m = \infty$.

Cette expression est, par définition, égale à

$$m\left(e^{\frac{1}{m}\log z} - 1\right) = m\left(\frac{\log z}{m} + \frac{1}{2}\frac{\log^2 z}{m^2} + \ldots\right)$$
$$= \log z + \frac{1}{2}\frac{\log^2 z}{m} + \ldots.$$

Sa vraie valeur est $\log z$.

3° Cherchons enfin la vraie valeur de z^z pour $z = 0$.

On a

$$z^z = e^{z \log z}.$$

La vraie valeur sera donc e^v, en désignant par v la vraie valeur de $z \log z$.

Or, soient ρ le module et φ l'argument de z, on aura

$$z \log z = z(\operatorname{Log}\rho + i\varphi).$$

Le premier terme $z \operatorname{Log}\rho$ a pour module $\rho \operatorname{Log}\rho$. Lorsque ρ tend vers zéro, $\operatorname{Log}\rho$ tend vers $-\infty$, mais moins rapidement; donc $\rho \operatorname{Log}\rho$ tend vers zéro.

Le second terme $zi\varphi$ a pour module $\rho\varphi$, qui peut prendre une suite de valeurs quelconques lorsque ρ tend vers zéro, à condition de choisir convenablement les valeurs correspondantes de φ. La vraie valeur est donc indéterminée, tant qu'on ne précisera rien sur la manière dont φ varie.

Mais si cet argument est astreint à rester compris entre deux nombres fixes (en particulier, si z reste réel), $\rho\varphi$ tendra vers zéro. Donc on aura

$$v = \lim z \log z = 0, \qquad \lim z^z = e^v = 1.$$

283. La vraie valeur d'une fonction de plusieurs variables est généralement indéterminée.

Considérons, par exemple, la fonction $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$. Supposons que φ et ψ s'annulent pour $x = a$, $y = b$, mais que leurs dérivées partielles ne s'annulent pas. La vraie valeur serait la limite du rapport

$$\frac{\varphi(a+h, b+k)}{\psi(a+h, b+k)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k + R}{\frac{\partial\psi}{\partial a}h + \frac{\partial\psi}{\partial b}k + \rho}$$

ou

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k}{\frac{\partial\psi}{\partial a}h + \frac{\partial\psi}{\partial b}k}.$$

On voit qu'elle dépend du rapport variable $\frac{h}{k}$, à moins que l'on n'ait

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}{\frac{\partial\psi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial b}}{\frac{\partial\psi}{\partial b}}.$$

III. — Séries et produits infinis à termes numériques.

284. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ une suite indéfinie de quantités. Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, si les sommes successives

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \end{aligned}$$

tendent vers une limite finie s, on dit que la série infinie

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \Sigma u_n$$

est *convergente* et a pour *somme* s.

Dans le cas contraire, la série est *divergente*.

285. La divergence peut se manifester de plusieurs manières :

1° Les sommes $s_1, \dots, s_n, \dots$ peuvent tendre vers ∞. Ce mode de divergence est le seul qui puisse se présenter si les quantités $u_1, \dots, u_n, \dots$ sont réelles et positives, car alors les quantités $s_1, \dots, s_n, \dots$ sont positives et forment une suite croissante (**10**).

2° Les sommes $s_1, \dots, s_n$ ne tendent vers aucune limite finie ou infinie.

Ce cas se présenterait, par exemple, pour la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots.$$

286. Lorsqu'on peut trouver l'expression générale des sommes s_n, on devra la discuter pour s'assurer si pour $n = \infty$ elle tend vers une limite finie et déterminer celle-ci.

Considérons, par exemple, la progression géométrique

$$a + ar + \dots + ar^n + \dots = \Sigma ar^n.$$

On a

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{1}$$

Si $|r| < 1$, $|r|^n$ et, par suite, r^n tendra vers zéro. La série est donc convergente et a pour somme $\frac{a}{1 - r}$.

Si $|r| \geqq 1$, s est, au contraire, divergente ; car, pour qu'elle convergeât, il faudrait qu'on eût

$$0 = \lim_{n=\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim ar^n,$$

ce qui n'a pas lieu ; car on a

$$|ar^n| = |a|\,|r|^n \geqq |a|.$$

287. Considérons, comme second exemple, la série

$$\sum \frac{1}{(z+n-1)(z+n)\dots(z+n+k)}.$$

Le terme général peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{(z+n-1)\dots(z+n+k-1)} - \frac{1}{(z+n)\dots(z+n+k)}\right].$$

Sommant de 1 à m toutes ces expressions, il viendra

$$s_m = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)} - \frac{1}{(z+m)\dots(z+m+k)}\right],$$

les autres termes se détruisant deux à deux.

Passant à la limite, il viendra

$$s = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)}\right].$$

288. Dans le cas beaucoup plus fréquent où l'on n'est pas en mesure de déterminer les sommes s_n, on sait (9) que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que l'on ait, pour toute valeur de p,

$$|s_n - s_{n+p}| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

ε_n ne croissant pas quand n croît, et tendant vers zéro pour $n = \infty$.

On aura d'ailleurs, en passant à la limite, pour $p = \infty$,

$$|s_n - s| < \varepsilon_n.$$

La condition de convergence sera évidemment satisfaite si l'on a

$$|u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

Cette dernière relation, suffisante, mais non nécessaire pour que S converge, exprime que la série à termes réels et positifs

$$T = |u_1| + \dots + |u_n| + \dots,$$

formée par les modules des termes de S, est elle-même convergente. Si cette circonstance se présente, on dira que la

série S est *absolument convergente*. On dira, au contraire, que cette série S est *semi-convergente* si elle est convergente, sans que T le soit.

Les propositions suivantes mettront en évidence la différence profonde qui existe entre ces deux classes de séries.

289. Théorème. — *On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre de ses termes.*

Soit $s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ la série donnée. Changeons l'ordre de ses termes; soient $\nu_1, \nu_2, \ldots$ les rangs respectivement occupés dans la nouvelle série s' par les termes $u_1, u_2, \ldots$. Soit s'_m la somme des m premiers termes de s'. Il faut montrer qu'on peut assigner un nombre μ tel que si $m > \mu$, $|s'_m - s|$ deviendra moindre que toute quantité δ fixée d'avance.

Soit n un entier à déterminer ultérieurement; désignons par μ le plus grand des entiers $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Si $m > \mu$, la somme s'_m se composera : 1° des termes $u_1, \ldots, u_n$; 2° d'un certain nombre d'autres termes $u_\alpha, u_\beta, \ldots$ d'indice $> n$; soit $n + p$ le plus grand de ces indices.

De l'égalité

$$s'_m - s = s_n - s + s'_m - s_n = s_n - s + u_\alpha + u_\beta + \ldots,$$

on déduit

$$\begin{aligned} |s'_m - s| &\leqq |s_n - s| + |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots \\ &\leqq |s_n - s| + [|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|] \leqq 2\varepsilon_n, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand n tend vers ∞. Donc, en choisissant n assez grand, on peut la rendre $< \delta$.

290. *Remarque*. — On peut, d'une infinité de manières, répartir les termes de s en une infinité de classes contenant chacune une infinité de termes. (Nous pouvons, par exemple, mettre dans une première classe les termes dont l'indice est un

nombre premier; dans une seconde, ceux où il est le produit de deux facteurs premiers, et ainsi de suite.)

Soient $v_{i1}, v_{i2}, \ldots$ les termes de la classe i, écrits dans un ordre déterminé : les séries

$$t_i = v_{i1} + v_{i2} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

seront absolument convergentes, et l'on aura

$$s = t_1 + t_2 + \ldots.$$

Soient, en effet, t_{im} la somme des m premiers termes de t_i; s_n celle des n premiers termes de s. Il faut montrer d'abord que, si m tend vers ∞, la somme

$$|v_{i,m+1}| + \ldots + |v_{i,m+p}|$$

tend vers zéro, quel que soit p.

L'entier n étant choisi à volonté, prenons m assez grand pour que tous ceux des termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui figurent dans t_i figurent dans $t_{i,m}$. Les termes $v_{i,m+1}, \ldots, v_{i,m+p}$ seront donc de la forme $u_\alpha, u_\beta, \ldots$, où les indices $\alpha, \beta, \ldots$ sont $> n$. Soit $n+q$ le plus grand d'entre eux, on aura

$$\begin{aligned} |v_{i,m+1}| + \ldots + |v_{i,m+p}| &= |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots \\ &\overline{\overline{<}} |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+q}| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n, \end{aligned}$$

quantité qui tend vers zéro, pour n infini.

Considérons, en second lieu, la somme

$$s_{lm} = t_{1m} + t_{2m} + \ldots + t_{lm},$$

où l, m seront pris assez grands pour que s_{lm} contienne tous les termes de s_n; on aura

$$s_{lm} - s_n = u_\alpha + u_\beta + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \ldots$ étant $> n$; et, par suite,

$$|s_{lm} - s_n| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n.$$

Faisons tendre m vers ∞; nous aurons à la limite

$$|t_1 + t_2 + \ldots + t_l - s_n| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n,$$

puis, en faisant tendre l vers ∞,

$$|t_1 + t_2 + \ldots - s_n| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n.$$

Faisant tendre enfin n vers ∞, il viendra

$$s = t_1 + t_2 + \ldots.$$

291. Théorème. — *La somme d'une série semi-convergente, à termes réels, dépend de l'ordre de ces termes; en disposant ceux-ci convenablement, on peut lui donner la valeur que l'on veut.*

Soit $s = u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ la série donnée. Puisque elle est convergente, on aura

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon_n$$

et, en particulier, comme $u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$,

$$|u_{n+p}| = |s_{n+p-1} - s_{n+p}| < \varepsilon_{n+p-1} < \varepsilon_n.$$

Soient d'ailleurs A_n et $-B_n$ la somme des termes positifs et celle des termes négatifs qui sont contenus dans s_n; on aura

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim(A_n - B_n) = s.$$

Mais, d'autre part, la série des modules

$$|u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

est divergente par hypothèse. Donc les sommes

$$\sigma_1 = |u_1|, \quad \ldots, \quad \sigma_n = |u_1| + \ldots + |u_n| = A_n + B_n,$$

ne tendent pas vers une limite finie, et comme elles sont positives, et vont en croissant, elles tendent vers ∞.

Les deux conditions que nous venons de trouver

$$\lim |A_n - B_n| = s, \qquad \lim |A_n + B_n| = \infty$$

donnent évidemment

$$\lim A_n = \infty, \qquad \lim B_n = \infty.$$

Soient donc $c_1, c_2, \ldots$ les termes positifs, et $-d_1, -d_2, \ldots$

les termes négatifs de la série s. Les deux sommes

$$c_1 + c_2 + \ldots \quad \text{et} \quad d_1 + d_2 + \ldots,$$

considérées séparément, seront infinies.

D'ailleurs, le rang d'un terme quelconque dans l'une de ces séries étant au plus égal à celui qu'il occupe dans la série $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ qui résulte de leur réunion, on aura

$$|c_{n+p}| < \varepsilon_n, \qquad d_{n+p} < \varepsilon_n.$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'en rangeant convenablement les termes de la série, on pourra lui donner pour somme un nombre M choisi à volonté.

Prenons, en effet, dans la suite positive c_1, c_2, ... le nombre de termes strictement nécessaire pour que leur somme surpasse M (ce qui est toujours possible, puisque la somme $c_1 + \ldots + c_n + \ldots$ est infinie), puis dans la suite négative $-d_1$, $-d_2$, ... le nombre de termes nécessaires pour ramener la somme au-dessous de M, puis dans la suite positive assez de termes pour lui faire dépasser de nouveau M, etc.

Soient s' la nouvelle série ainsi formée, s'_m la somme de ses m premiers termes. Les quantités $s'_m - \mathrm{M}$ oscilleront autour de zéro et convergeront d'ailleurs vers cette limite.

En effet, la différence $s'_m - \mathrm{M}$ est au plus égale en valeur absolue au terme dont l'adjonction a produit le dernier changement de signe dans la suite

$$s'_1 - \mathrm{M}, \quad \ldots, \quad s'_m - \mathrm{M}.$$

Chacun de ces changements de signe exige alternativement l'emploi d'un terme au moins de l'une des suites c_1, c_2, ... ou $-d_1$, $-d_2$, ... Dès que m sera devenu assez grand pour que le nombre des changements de signe qui se sont produits avant le terme $s'_m - \mathrm{M}$ soit $> 2n$, le terme qui a produit le dernier d'entre eux occupera un rang supérieur à n dans celle des suites $c_1, c_2, \ldots; -d_1, -d_2, \ldots$ à laquelle il appartient, on aura donc

$$|s'_m - \mathrm{M}| < \varepsilon_n.$$

292. Supposons que les termes de la série s, au lieu d'être réels, comme on l'a admis, soient des quantités complexes

$$u_n = a_n + b_n i.$$

La série Σu_n tendant vers une limite finie $c + di$, Σa_n et Σb_n tendront respectivement vers c et d. D'autre part, la série $\Sigma |u_n| = \Sigma \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est divergente, par hypothèse, et, ses termes étant positifs, elle a une somme infinie Il en sera de même *a fortiori* de la somme $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ dont les termes sont au moins égaux aux siens. Donc, l'une au moins des deux séries $\Sigma |a_n|$, $\Sigma |b_n|$ a une somme infinie. Donc, l'une au moins des deux séries Σa_n et Σb_n est semi-convergente. On pourra donc, en modifiant l'ordre des termes de la série s, donner une valeur arbitraire à sa partie réelle, ou à sa partie imaginaire.

293. Théorème. — *Si deux séries $s = \Sigma u_n$ et $t = \Sigma v_n$ sont absolument convergentes, la série $\sigma = \Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et aura pour somme st.*

Soit, en effet, σ_m la somme des m premiers termes de la série σ, le nombre m étant quelconque, mais suffisant pour qu'on retrouve dans σ_m tous les termes du produit

$$s_n t_n = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n),$$

n étant un nombre donné quelconque. On aura

$$\sigma_m = s_n t_n + \mathrm{R},$$

R étant une somme de termes $u_\alpha v_\beta$, dans chacun desquels l'un au moins des deux indices α, β sera $> n$.

Soit $\mathrm{R} = u_\alpha v_\beta + u_{\alpha'} v_{\beta'} + \ldots$ et soit $n + p$ le plus grand des indices α, β, α', β', ... On aura

$$\begin{aligned}
|\sigma_m - st| &\leqq |s_n t_n - st| + |\mathrm{R}| \\
&\leqq |s_n t_n - st| + |u_\alpha|\,|v_\beta| + |u_{\alpha'}|\,|v_{\beta'}| + \ldots \\
&\leqq |s_n t_n - st| + (|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|)(|v_1| + \ldots + |v_{n+p}|) \\
&\qquad + (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p}|).
\end{aligned}$$

Or les séries $S = \Sigma |u_n|$, $T = \Sigma |v_n|$ étant convergentes, par hypothèse, on aura

$$|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$
$$|v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p}| < \varepsilon'_n$$

et, d'autre part,

$$|u_1| + \ldots + |u_n| \quad < S,$$
$$|v_1| + \ldots + |v_{n+p}| < T.$$

Donc

$$|\sigma_m - st| < |s_n t_n - st| + \varepsilon_n T + \varepsilon'_n S,$$

quantité dont chaque terme converge vers zéro si n tend vers ∞. Mais on peut prendre n aussi grand qu'on veut, à condition de faire croître en même temps m. On aura donc bien, pour $m = \infty$,

$$\lim |\sigma_m - st| = 0.$$

294. Ce théorème ne subsiste évidemment pas si les séries s et t ne sont pas absolument convergentes. Mais si l'une d'elles seulement, t, est semi-convergente, on peut le remplacer par le suivant :

La série W *qui a pour terme général*

$$w_n = (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1)$$

est convergente et a pour produit st.

En effet, on a par hypothèse

$$|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$
$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| \quad < \varepsilon'_n.$$

Cela posé, la somme

$$W_n = w_1 + \ldots + w_n$$

est évidemment égale à

$$s_n t_n - u_2 v_n - u_3(v_{n-1} + v_n) - \ldots$$
$$- u_n(v_2 + v_3 + \ldots v_n).$$

On en déduit

$$|W_n - st| \overline{\overline{<}} |s_n t_n - st| + |u_2||v_n| + |u_3||v_{n-1} + v_n|$$
$$+ \ldots + |u_n||v_2 + v_3 + \ldots + v_n|$$
$$< |s_n t_n - st| + |u_2|\varepsilon'_{n-1} + |u_3|\varepsilon'_{n-2} + \ldots + |u_n|\varepsilon'_1.$$

Soit m le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$. Les quantités $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ formant une suite non croissante, on aura, *a fortiori*,

$$\begin{aligned}|W_n - st| &\overline{\overline{<}} |s_n t_n - st| + (|u_2| + \ldots + |u_m|)\varepsilon'_{n-m+1} \\ &\quad + (|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|)\varepsilon'_1 \\ &\overline{\overline{<}} |s_n t_n - st| + \varepsilon_1 \varepsilon'_{n-m+1} + \varepsilon_m \varepsilon'_1.\end{aligned}$$

Si n tend vers ∞, il en sera de même de m et $n - m + 1$. Donc tous les termes du second membre tendront vers zéro, et l'on aura

$$\lim |W_n - st| = 0.$$

295. Si les séries s et t sont toutes deux semi-convergentes, la série W pourra ne plus être convergente; mais si elle l'est, on aura encore

$$W = st.$$

Pour le faire voir, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Si les quantités $s_1, \ldots, s_n$ convergent vers une limite s, on aura

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s.$$

On a, en effet,

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s + \frac{(s_1 - s) + \ldots + (s_n - s)}{n};$$

d'où

$$\left| \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - s \right| \overline{\overline{<}} \frac{|s_1 - s| + \ldots + |s_n - s|}{n}.$$

D'ailleurs, $s_1, s_2, \ldots$ tendant vers une limite s, on a

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

et à la limite, en faisant tendre p vers ∞,

$$|s_n - s| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n.$$

Donc

$$\left|\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right| \leqq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}.$$

Les quantités ε formant une suite non croissante, on aura, *a fortiori*, en désignant par λ l'entier positif le plus voisin de $\sqrt{n}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right| &\leqq \frac{\lambda\varepsilon_1+(n-\lambda)\varepsilon_{\lambda+1}}{n}\\ &\leqq \frac{\lambda\varepsilon_1}{n}+\varepsilon_{\lambda+1},\end{aligned}$$

et, en faisant tendre n vers ∞,

$$\lim\left(\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right)=0.$$

Les quantités $s_1, \ldots, s_n$ étant toujours supposées converger vers s, leurs modules $|s_1|, \ldots, |s_n|$ convergent évidemment vers $|s|$. Donc on aura également

$$\lim\left|\frac{|s_1|+\ldots+|s_n|}{n}\right|=|s|.$$

Si donc les séries s, t, W sont convergentes, on aura, en désignant respectivement par s_n, t_n, W_n les sommes de leurs n premiers termes,

$$s=\lim\frac{s_1+\ldots+s_n}{n},\qquad t=\lim\frac{t_1+\ldots+t_n}{n},$$
$$W=\lim\frac{W_1+\ldots+W_n}{n}.$$

296. Cela posé, on a

$$\begin{aligned}W_n &= w_1+\ldots+w_n\\ &= u_1(v_1+\ldots+v_n)+u_2(v_1+\ldots+v_{n-1})+\ldots\\ &= u_1t_n+u_2t_{n-1}+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_1+\ldots+W_n &= u_1t_n+(u_1+u_2)t_{n-1}+\ldots\\ &= s_1t_n+s_2t_{n-1}+\ldots+s_nt_1.\end{aligned}$$

Posons

$$s_\mu - s = h_\mu, \qquad t_\mu - t = k_\mu,$$

d'où

$$|h_\mu| \leqq \varepsilon_\mu, \qquad |k_\mu| \leqq \varepsilon'_\mu.$$

On aura, en désignant encore par m le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} & s_1 t_n + \ldots + s_m t_{n-m+1} \\ & \quad = (s_1 + \ldots + s_m) t + s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}, \\ & s_{m+1} t_{n-m} + \ldots + s_n t_1 \\ & \quad = (t_1 + \ldots + t_{n-m}) s + h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & \frac{W_1 + \ldots + W_n}{n} - \frac{(s_1 + \ldots + s_m) t}{m} \frac{m}{n} - \frac{(t_1 + \ldots + t_{n-m}) s}{n-m} \frac{n-m}{n} \\ & \quad = \frac{(s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}) + (h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1)}{n}. \end{aligned}$$

Passons à la limite pour $n = \infty$. Si l'on remarque que m et $n - m$ deviennent infinis avec n et que $\frac{m}{n}$, $\frac{n-m}{n}$ ont pour limite commune $\frac{1}{2}$, on voit que la limite du premier membre sera

$$W - \frac{st}{2} - \frac{st}{2} = W - st.$$

Donc on aura

$$W - st = \lim \left[\frac{(s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}) + h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1}{n} \right].$$

Or ce second membre tend vers zéro. En effet, son module est au plus égal à

$$\begin{aligned} & \frac{|s_1| \varepsilon'_n + \ldots + |s_m| \varepsilon'_{n-m+1} + \varepsilon_{m+1} |t_{n-m}| + \ldots + \varepsilon_n |t_1|}{n} \\ & \quad \leqq \frac{|s_1| + \ldots + s_m|}{m} \frac{m}{n} \varepsilon'_{n-m+1} + \frac{|t_1| + \ldots + |t_{n-m}|}{n-m} \cdot \frac{n-m}{n} \varepsilon_{m+1}. \end{aligned}$$

Or, si n tend vers ∞, $\dfrac{|s_1|+\ldots+|s_m|}{m}$ tendra vers $|s|$, $\dfrac{|t_1|+\ldots+|t_{n-m}|}{n-m}$ vers $|t|$, $\dfrac{m}{n}$ et $\dfrac{n-m}{n}$ vers $\frac{1}{2}$, ε'_{n-m+1} et ε_{m+1} vers zéro.

297. Cherchons à obtenir des règles qui nous permettent de distinguer si une série est ou non convergente.

Considérons à cet effet une série dont le terme général soit un produit de deux facteurs, telle que la suivante :

$$\Sigma \alpha_n u_n.$$

Cette série sera convergente si la quantité

$$(2) \qquad |\alpha_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} u_{n+p}|$$

tend vers zéro pour $n = \infty$, quel que soit p. Elle sera même absolument convergente si

$$|\alpha_{n+1}|\,|u_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{n+p}|\,|u_{n+p}|$$

tend également vers zéro.

Cette dernière condition sera certainement satisfaite si : 1° la série Σu_n est absolument convergente; 2° les modules des facteurs α_n ne surpassent pas un nombre fixe A.

On aura en effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+1}|\,|u_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{n+p}|\,|u_{n+p}| &\overline{\overline{<}}\, \mathrm{A}(|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|) \\ &\overline{\overline{<}}\, \mathrm{A}\varepsilon_n, \end{aligned}$$

quantité qui tend vers zéro pour $n = \infty$.

Donc, *en multipliant les termes d'une série absolument convergente par des facteurs dont les modules ne surpassent pas un nombre fixe, on obtient une nouvelle série de même nature.*

Si, de plus, les modules des facteurs α_n ne deviennent jamais inférieurs à un autre nombre fixe a, leurs inverses ne pourront surpasser $\dfrac{1}{a}$, et l'on pourra réciproquement conclure de la convergence absolue de la série $\Sigma \alpha_n u_n$ celle de

la série Σu_n. Les deux séries seront donc en même temps absolument convergentes ou non.

298. Deux autres cas de convergence certaine peuvent être mis en évidence, en mettant l'expression (2) sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&{}_{n+p}(u_{n+p}+\ldots+u_{n+1}) \\
&\quad+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})(u_{n+p-1}+\ldots+u_{n+1})+\ldots+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})\,u_{n+1}\,| \\
&=|\,\alpha_{n+p}(s_{n+p}-s_n) \\
&\quad+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})(s_{n+p-1}-s_n)+\ldots+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})(s_{n+1}-s_n)\,|.
\end{aligned}
$$

Soit M_n le plus grand des nombres $|s_{n+p}-s_n|$, ..., $|s_{n+1}-s_n|$. L'expression précédente sera au plus égale à

$$(3)\qquad (|\alpha_{n+p}|+|\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|)\,M_n.$$

Cette quantité tendra vers zéro pour $n=\infty$, si l'un des deux facteurs qui la composent tend vers zéro, l'autre restant fini.

299. Supposons, en premier lieu, avec Dirichlet :

1° Que la série

$$(4)\qquad |\alpha_1-\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|+\ldots$$

soit convergente ;

2° Qu'on ait, pour $n=\infty$,

$$\lim \alpha_n = 0;$$

3° Que les modules des sommes s_1, s_2, ... ne surpassent pas une limite fixe L.

Si ces conditions sont remplies, on aura

$$(5)\qquad |\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|<\varepsilon'_n,$$

ε'_n tendant vers zéro.

D'après la seconde hypothèse, α_{n+p} tendra également vers zéro. Enfin les quantités $|s_{n+p}-s_n|$, ... et, par suite, M_n ne surpasseront pas $2L$. Il y aura donc convergence.

Le cas particulier le plus intéressant est celui où l'on suppose :

1° Que les quantités α sont positives et décroissantes.

2° Qu'on ait $\lim \alpha_n = 0$. Dans ce cas, la série (4), qui se réduit à

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots,$$

est évidemment convergente, et a pour somme α_1.

3° Que les quantités $u_1, u_2, \dots$ forment une suite périodique, telle que la somme des termes d'une période soit nulle.

Particularisons encore, en supposant que la suite des u se réduise à la suivante

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \quad \dots,$$

nous obtiendrons ce théorème :

Une série

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots,$$

dont les termes sont positifs et décroissants, et tels que l'on ait $\lim \alpha_n = 0$, *est toujours convergente.*

300. Supposons, en second lieu, avec Abel :

1° Que la série (4) soit convergente;

2° Que la série $u_1 + \dots + u_n + \dots$ le soit aussi.

L'expression (5) tendra encore vers zéro. On a, d'autre part,

$$\alpha_{n+p} = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) - \dots - (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p});$$

d'où

$$|\alpha_{n+p}| < |\alpha_1| + A,$$

A désignant la somme de la série (4).

Donc le premier facteur de (3) restera au-dessous d'un nombre fixe. Quant aux quantités $|s_{n+p} - s_n|, \dots$, elles seront toutes moindres que ε_n. Le second facteur tend donc vers zéro, et il y a encore convergence.

La convergence de la série (4) est évidemment assurée si les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont réelles, positives et non crois-

santes ; dans ce cas particulier, on aura donc le théorème suivant :

Une série convergente reste encore convergente si l'on multiplie ses divers termes par des nombres positifs formant une suite non croissante.

301. Les séries absolument convergentes, étant les seules où l'on puisse changer à son gré l'ordre des termes, peuvent seules être employées commodément dans l'analyse. Il importe d'apprendre à les reconnaître. Cette recherche doit se faire sur la série des modules, dont les termes sont réels et positifs. Cette circonstance donne un intérêt particulier à l'étude de la convergence de ce genre de séries, qui va désormais nous occuper exclusivement.

Cette recherche est fondée sur le principe suivant :

Si une série (à termes positifs) Σv_n a ses termes plus petits à partir d'un certain rang que ceux d'une série convergente de même nature Σu_n, elle sera elle-même convergente.

En effet, si l'on a

$$v_n < u_n, \qquad u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} < \varepsilon_n,$$

on aura *a fortiori*

$$v_{n+1} + \ldots + v_{n+p} < \varepsilon_n.$$

Il est d'ailleurs évident qu'on n'altère pas la convergence d'une série en modifiant arbitrairement un certain nombre de termes au début. Il suffit donc que l'inégalité $v_n < u_n$ ait lieu pour toutes les valeurs de n qui surpassent un nombre fixe ν.

Si, au contraire, la série Σv_n a ses termes plus grands que ceux de Σu_n, et, si cette dernière série est divergente, Σv_n le sera.

La démonstration est la même, le sens des inégalités étant renversé.

Pour juger de la convergence ou de la divergence d'une série, il conviendra donc de former un tableau de séries convergentes, un autre de séries divergentes, auxquelles on comparera la série donnée.

302. La comparaison avec une progression géométrique nous fournit une première règle simple et suffisante dans un grand nombre de cas.

La série Σu_n est convergente si, à partir d'un certain rang, on a constamment $\sqrt[n]{u_n} < r$, r étant une constante < 1; divergente si, à partir d'un certain rang, on a $\sqrt[n]{u_n} > r > 1$.

Car on a, dans le premier cas,

$$u_n < r^n, \qquad \Sigma r^n \text{ convergente},$$

et, dans le second,

$$u_n > r^n, \qquad \Sigma r^n \text{ divergente}.$$

Le premier cas se présentera, en particulier, si $\sqrt[n]{u_n}$ tend pour $n = \infty$ vers une limite l moindre que 1; car soit r une quantité quelconque comprise entre l et l'unité; on pourra trouver un nombre ν à partir duquel $\sqrt[n]{u_n}$ différera de l d'une quantité moindre en valeur absolue que $l - r$. A partir de ce moment, on aura constamment $\sqrt[n]{u_n} > r$.

On voit de même que le second cas se présente si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite < 1.

303. Lorsque la règle précédente ne s'applique plus, on se trouve conduit à chercher de nouvelles séries moins rapidement convergentes (ou divergentes) que les progressions géométriques, pour leur comparer la série donnée.

On peut construire à volonté de semblables séries par les considérations suivantes :

Soit $M_1, \ldots, M_n$ une suite de quantités positives crois-

santes, et telles que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} M_n = \infty$. La série

$$(6) \qquad M_1 + (M_2 - M_1) + \ldots + (M_n - M_{n-1}) + \ldots$$

sera une série divergente à termes positifs, où la somme s_n des n premiers termes sera M_n.

La série

$$\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right) + \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n+1}}\right) + \ldots = \sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} M_n}$$

sera, au contraire, convergente; la somme s_n des n premiers termes a pour valeur $\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}}$, expression dont la limite s est $\frac{1}{M_1}$.

Réciproquement, toute série à termes positifs pourra être mise sous la forme (6) si elle est divergente, sous la forme (7) si elle est convergente. Les quantités $M_1, \ldots, M_n$ seront déterminées, dans le premier cas, par la condition

$$M_n = s_n,$$

dans le second, par les conditions

$$\frac{1}{M_1} = s, \qquad \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}} = s_n,$$

d'où l'on tire les valeurs

$$M_1 = \frac{1}{s}, \qquad M_{n+1} = \frac{1}{s - s_n}.$$

304. Nous allons montrer que la suite $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ permet de construire deux systèmes de séries en nombre illimité, à convergence (ou à divergence) de moins en moins rapide, et dont les séries (7) et (6) ne sont que les premiers termes.

Nous nous appuierons, pour le faire, sur quelques inégalités de la théorie des logarithmes que nous allons établir.

Si $x > 0$, on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots > 1 + x,$$

d'où, en posant $x = \frac{y - z}{z}$, $(y > z)$,

$$e^{\frac{y-z}{z}} > \frac{y}{z}.$$

Mais on a, d'autre part, si $0 < x < 1$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots < 1 + x + x^2 + \ldots < \frac{1}{1 - x},$$

d'où, en posant

$$x = \frac{y - z}{y} \qquad (y > z),$$

$$e^{\frac{y-z}{y}} < \frac{y}{z}.$$

En prenant les logarithmes dans les deux membres de c inégalités, il viendra

$$(8) \qquad \frac{y - z}{y} < \operatorname{Log} y - \operatorname{Log} z < \frac{y - z}{z}.$$

Plus généralement, posons

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}_2 x, \qquad \operatorname{Log}\operatorname{Log}_2 x = \operatorname{Log}_3 x,$$
$$\Lambda_\mu x = \operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x \ldots \operatorname{Log}_\mu x.$$

On aura, si $y > z$,

$$\operatorname{Log} y > \operatorname{Log} z, \qquad \ldots, \qquad \operatorname{Log}_\mu y > \operatorname{Log}_\mu z,$$

Appliquant les inégalités (8) à l'expression

$$\operatorname{Log}_{\mu+1} y - \operatorname{Log}_{\mu+1} z = \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Log}_\mu y}{\operatorname{Log}_\mu z},$$

il viendra

$$\frac{\operatorname{Log}_\mu y - \operatorname{Log}_\mu z}{\operatorname{Log}_\mu y} < \operatorname{Log}_{\mu+1} y - \operatorname{Log}_{\mu+1} z < \frac{\operatorname{Log}_\mu y - \operatorname{Log}_\mu z}{\operatorname{Log}_\mu z}.$$

Faisons le produit des inégalités obtenues en posant successivement $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$; multiplions encore par l'inégalité (8); il viendra

$$(9) \qquad \frac{y-z}{y\Lambda_{m-1}y} < \operatorname{Log}_m y - \operatorname{Log}_m z < \frac{y-z}{z\Lambda_{m-1}z}.$$

305. Ces préliminaires posés, nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $M_1, \ldots, M_n$ *une suite de quantités positives satisfaisant aux conditions*

$$M_{n+1} > M_n, \qquad \lim_{n=\infty} M_n = \infty,$$

et soit ρ *une quantité positive quelconque :*

Les séries

$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho}, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}\operatorname{Log}M_{n+1}\operatorname{Log}^\rho M_n}, \quad \ldots,$$
$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}\Lambda_m M_{n+1}\operatorname{Log}_m^\rho M_n},$$

seront toutes convergentes, et les séries

$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n\operatorname{Log}M_n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n\Lambda_m M_n},$$

seront toutes divergentes.

En effet, les quantités $M_1^\rho, \ldots, M_n^\rho, \ldots$ satisfaisant évidemment aux conditions

$$M_{n+1}^\rho > M_n^\rho \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} M_n^\rho = \infty,$$

la série $\sum \frac{M_{n+1}^\rho - M_n^\rho}{M_{n+1}^\rho M_n^\rho}$ sera convergente $\left(\text{et aura pour somme } \frac{1}{M_1^\rho}\right)$. La série $\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho}$ le sera également (297) si le rapport

$$\alpha_n = \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho} : \frac{M_{n+1}^\rho - M_n^\rho}{M_{n+1}^\rho M_n^\rho}$$

des termes généraux de ces deux séries reste inférieur à une limite fixe. Il est aisé de voir qu'il en est ainsi; car, si nous posons, pour abréger,

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = q,$$

on aura

$$\alpha_n = \frac{1-q}{1-q^\rho},$$

et q sera positif et < 1. Soit μ un entier quelconque, tel que l'on ait $\frac{1}{\mu} < \rho$. On aura

$$\alpha_n < \frac{1-q}{1-q^{\frac{1}{\mu}}} < 1 + q^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + q^{\frac{\mu-1}{\mu}} < \mu.$$

Donc la série

$$\sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} M_n^\rho}$$

est convergente, et l'on sait d'ailleurs que la série

$$\Sigma(M_{n+1} - M_n)$$

est divergente.

En second lieu, les quantités

$$\mathrm{Log}_m M_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{Log}_m M_n,$$

satisfont évidemment aux relations

$$\mathrm{Log}_m M_{n+1} > \mathrm{Log}_m M_n, \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{Log}_m M_n = \infty.$$

Donc la série

$$\sum \frac{\mathrm{Log}_m M_{n+1} - \mathrm{Log}_m M_n}{\mathrm{Log}_m M_{n+1} \mathrm{Log}_m^\rho M_n}$$

est convergente. Or, en appliquant l'inégalité (9), on voit que ses termes sont plus grands que ceux de la série

$$\sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} \Lambda_{m-1} M_{n+1} \mathrm{Log}_m M_{n+1} \mathrm{Log}_m^\rho M_n}$$
$$= \sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} \Lambda_m M_{n+1} \mathrm{Log}_m^\rho M_n}.$$

Celle-ci est donc convergente.

De même, la série

$$\sum (\mathrm{Log}_m \mathrm{M}_{n+1} - \mathrm{Log}_m \mathrm{M}_n)$$

est divergente, et ses termes sont plus petits ~~grands~~ que ceux de la série

$$\sum \frac{\mathrm{M}_{n+1} - \mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_n \Lambda_{m-1} \mathrm{M}_n}.$$

Celle-ci est donc divergente.

306. Comme application particulière, posons

$$\mathrm{M}_1 = 1, \quad \ldots, \quad \mathrm{M}_n = n,$$

Nous obtiendrons la suite de séries divergentes

$$(10) \qquad \sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}\, n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}_m n},$$

Posant, d'autre part, $\mathrm{M}_n = n - 1$, nous aurons de même la suite de séries convergentes

$$\sum \frac{1}{n(n-1)^\rho}, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}\, n \,\mathrm{Log}^\rho (n-1)},$$

A cette dernière suite, on peut substituer celle-ci, dont les termes sont respectivement plus petits et dont la forme est un peu plus simple,

$$(11) \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}^{1+\rho} n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n \,\Lambda_m n \,\mathrm{Log}_m^\rho n}.$$

On remarquera que, x étant un nombre donné quelconque, ses logarithmes successifs $\mathrm{Log}\, x$, $\mathrm{Log}_2 x$, ... décroîtront sans cesse et finiront par devenir négatifs.

Si $\mathrm{Log}_\mu x$ est négatif, il n'aura plus de logarithme arithmétique, et les symboles suivants $\mathrm{Log}_{\mu+1} x$, ... n'auront plus de sens. Il pourra donc se présenter au début de chacune des séries types (10) et (11) un nombre limité de termes illusoires, suivis d'un terme négatif. Mais on pourra leur sub-

stituer des nombres positifs arbitraires sans altérer la convergence ou la divergence.

307. Les considérations suivantes montrent directement la divergence des séries (10) et la convergence des séries (11). Elles permettent, en outre, d'assigner deux limites entre lesquelles se trouve comprise la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de chacune d'elles.

Soit $F(n)$ une fonction de n, dont la dérivée $f(n)$ soit positive, continue et décroissante, et tende vers zéro pour $n = \infty$. On a, pour les valeurs de x comprises entre n et $n+1$,

$$f(n) > f(x) > f(n+1)$$

et, en intégrant de n à $n+1$,

$$f(n) > \int_n^{n+1} f(x)\,dx > f(n+1).$$

Posons successivement $n = \nu,\ \nu+1,\ \ldots,\ \nu+p-1$ et ajoutons les inégalités obtenues; il viendra

$$\begin{aligned} f(\nu) + \ldots + f(\nu+p-1) &> \int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx \\ &> f(\nu+1) + \ldots + f(\nu+p). \end{aligned}$$

La somme $f(\nu+1) + \ldots + f(\nu+p)$ sera donc comprise entre les deux nombres fixes

$$\int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx = F(\nu+p) - F(\nu)$$

et

$$\int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx + f(\nu+p) - f(\nu).$$

Soit en particulier

$$F(n) = \operatorname{Log} n, \qquad \text{d'où} \qquad f(n) = \frac{1}{n};$$

posons en outre $\nu = 1$, nous voyons que la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p+1}$$

est comprise entre $\text{Log}(p+1)$ et $\text{Log}(p+1) - 1$.

Si ν tend vers ∞, $f(\nu)$ et $f(\nu + p)$ tendant vers zéro, on aura

$$\lim_{\nu=\infty} [f(\nu+1) + \ldots + f(\nu+p)] = \lim_{\nu=\infty} \int_{\nu}^{\nu+p} f(x)\,dx.$$

Pour que la série $\Sigma f(n)$ soit convergente, il faut et il suffit que le premier membre de cette égalité soit nul quel que soit p. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence est donc que l'intégrale

$$\int_{\nu}^{\nu+p} f(x)\,dx = \text{F}(\nu+p) - \text{F}(\nu)$$

tende vers zéro ou, ce qui revient au même, que $\text{F}(n)$ tende vers une limite finie pour $n = \infty$.

308. Cela posé, les fonctions

$$\text{Log}\, n, \quad \text{Log}_2 n, \quad \ldots, \quad \text{Log}_{m+1} n,$$

qui ont respectivement pour dérivées

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n\,\text{Log}\, n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n\,\Lambda_m n}, \quad \ldots,$$

deviennent infinies pour $n = \infty$. Donc les séries (10) sont divergentes.

Au contraire, les fonctions

$$\frac{n^{-\rho}}{-\rho}, \quad \frac{\text{Log}^{-\rho} n}{-\rho}, \quad \ldots, \quad \frac{\text{Log}_m^{-\rho} n}{-\rho}, \quad \ldots,$$

qui ont pour dérivées

$$\frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \frac{1}{n\,\text{Log}^{1+\rho} n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n\,\Lambda_m n\,\text{Log}_m^{\rho} n}, \quad \ldots,$$

s'annulent pour $n = \infty$. Donc les séries (11) sont convergentes.

309. La remarque suivante fournit un second procédé pour juger de la convergence d'une série à termes positifs par comparaison avec une autre série de même nature.

La série Σv_n est convergente si, pour toutes les valeurs de n non inférieures au nombre fixe ν, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\gtrless} \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

la série Σu_n étant convergente.

Elle est divergente si, pour $n \overline{\gtrless} \nu$, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

la série Σu_n étant divergente.

On a, en effet, dans le premier cas,

$$\frac{v_\nu}{u_\nu} \geqq \frac{v_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} \geqq \cdots \geqq \frac{v_n}{u_n} \geqq \cdots.$$

Donc, à partir du rang ν, la série Σv_n aura ses termes au plus égaux à ceux de la série convergente $\frac{v_\nu}{u_\nu} \Sigma u_n$; elle est donc elle-même convergente.

La seconde partie du théorème s'établit de même, le sens des inégalités étant changé.

310. Si l'on suppose que Σu_n soit une progression géométrique de raison r, on aura la proposition suivante :

La série Σv_n sera convergente si, pour $n \overline{\gtrless} \nu$, on a constamment

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{1}{r}, \qquad r \text{ étant } < 1$$

$\left(\textit{et en particulier si } \frac{v_n}{v_{n+1}} \textit{ tend vers une limite } l > 1\right).$

Elle sera divergente si, pour $n \geqq \nu$, *on a constamment*

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < \frac{1}{r}, \qquad r \text{ étant } > 1$$

$\left(\right.$*et en particulier si* $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ *tend vers une limite* $l < 1\left.\right)$.

311. La considération des séries (10) et (11) conduit à des règles plus précises. Pour les formuler, calculons pour chacune de ces séries la valeur approchée du rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$, en y négligeant les termes d'ordre plus élevé que $\frac{1}{n^2}$.

On a, avec cette approximation,

$$\frac{(n+1)^\rho}{n^\rho} = \frac{n^\rho + \rho n^{\rho-1} + \dots}{n^\rho} = 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}\frac{1}{n^2},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(n+1) &= \operatorname{Log} n + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \operatorname{Log} n + \frac{1}{n} \\
&= \operatorname{Log} n\left(1 + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}_2(n+1) &= \operatorname{Log}_2 n + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right) \\
&= \operatorname{Log}_2 n + \frac{1}{n \operatorname{Log} n} \\
&= \operatorname{Log}_2 n\left(1 + \frac{1}{n \Lambda_2 n}\right),
\end{aligned}$$

. . . .

et généralement

$$\operatorname{Log}_m(n+1) = \operatorname{Log}_m n\left(1 + \frac{1}{n \Lambda_m n}\right),$$

$$\operatorname{Log}_m^\rho(n+1) = \operatorname{Log}_m^\rho n\left(1 + \frac{\rho}{n \Lambda_m n}\right).$$

Enfin

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

$$\frac{(n+1)\,\Lambda_m(n+1)}{n\,\Lambda_m n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\operatorname{Log} n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n\,\Lambda_m n}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\operatorname{Log} n} + \ldots + \frac{1}{n\,\Lambda_m n},$$

. . . .,

$$\frac{(n+1)^{1+\rho}}{n^{1+\rho}} = 1 + \frac{1+\rho}{n} + \frac{(1+\rho)\rho}{2n^2},$$

. . . .,

$$\frac{(n+1)\,\Lambda_m(n+1)\operatorname{Log}_m^\rho(n+1)}{n\,\Lambda_m n\operatorname{Log}_m^\rho n}$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\operatorname{Log} n} + \ldots + \frac{1+\rho}{n\,\Lambda_m n}.$$

Telles sont les valeurs du rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ pour les séries (10) et (11). La première de ces valeurs seule est exacte. Les autres doivent être complétées par un reste de la forme $\frac{\theta_n}{n^2}$, θ_n étant infiniment petit pour $n = \infty$.

312. Cela posé, une série Σv_n sera divergente si, à partir de $n = \nu$, on a constamment

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$$

ou, plus généralement,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\overline{<}} \left(1 + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n\,\Lambda_m n}\right) - \frac{\lambda}{n^2},$$

λ étant une quantité positive fixe.

En effet, à la comparant à la série (10) correspondante, la différence

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\overline{<}} - \frac{\lambda + \theta_n}{n^2}$$

finira par devenir négative, θ_n étant infiniment petit.

Au contraire, Σv_n sera convergente, si l'on peut trouver une quantité positive λ telle que l'on ait, à partir de $n = \nu$,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\overline{>}} 1 + \frac{1+\lambda}{n}$$

ou, plus généralement,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\overline{>}} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \operatorname{Log} n} + \ldots + \frac{1+\lambda}{n \Lambda_m n}.$$

En effet, comparons la série Σv_n à la série correspondante Σu_n, formée avec une valeur de ρ moindre que λ. La différence

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\overline{>}} \frac{\lambda - \rho}{n \Lambda_m n} - \frac{\theta_n}{n^2}$$

prendra, pour de grandes valeurs de n, le signe de son premier terme, qui est positif.

313. Lorsque le rapport $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ est développable suivant les puissances entières de $\frac{1}{n}$ (ce cas est à peu près le seul qui se présente dans la pratique), les règles précédentes permettent de décider, dans tous les cas, s'il y a ou non convergence.

Soit, en effet, en s'arrêtant aux termes du second ordre,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2},$$

θ'_n restant fini pour $n = \infty$.

Si $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta \overline{\overline{<}} 1$, il y aura divergence; car, en

comparant la série Σv_n à la suivante

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n \operatorname{Log} n},$$

qui est divergente, on aura

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha - 1 + \frac{\beta - 1}{n} - \frac{1}{n \operatorname{Log} n} + \frac{\theta'_n - \theta_n}{n^2},$$

et le terme principal, qui, pour de grandes valeurs de n', donne son signe à cette expression, sera négatif.

Au contraire, si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta > 1$, il y aura convergence; car, en comparant la série Σv_n à la série convergente

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n \operatorname{Log}^{1+\rho} n},$$

on aura

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha - 1 + \frac{\beta - 1}{n} - \frac{1 + \rho}{n \operatorname{Log} n} + \frac{\theta'_n - \theta_n}{n^2},$$

expression qui, pour n suffisamment grand, sera positive, car son terme principal est positif.

314. Voici une dernière règle de convergence, due à M. Kummer :

Si, pour $n \geqq \nu$, on peut mettre le rapport $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ sous la forme

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{e_{n+1} + \alpha}{e_n},$$

α, e_ν, ..., e_n, ... désignant des quantités positives quelconques, la série Σv_n sera convergente.

On a, en effet,

$$v_{n+1} = \frac{v_n e_n - v_{n+1} e_{n+1}}{\alpha}.$$

Ajoutons les équations obtenues en donnant successivement

à n les valeurs ν, $\nu+1$, $\nu+p-1$, il viendra

$$v_{\nu+1}+\ldots+v_{\nu+p}=\frac{v_\nu e_\nu - v_{\nu+p}e_{\nu+p}}{\alpha}<\frac{v_\nu e_\nu}{\alpha}.$$

Donc la somme du premier membre tend, pour $p=\infty$, vers une limite au plus égale à $\frac{v_\nu e_\nu}{\alpha}$.

315. Séries a double sens. — On considère parfois des séries telles que

$$(12) \qquad \ldots+u_{-m}+\ldots+u_{-1}+u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots,$$

formées d'une infinité de termes s'étendant dans les deux sens à partir d'un terme central u_0. La somme s d'une semblable série sera, par définition, la limite de la somme

$$s_{mn}=(u_{-m}+\ldots+u_0+\ldots+u_n),$$

lorsque m et n tendent tous deux vers ∞, sans être liés par aucune relation. S'il existe une semblable limite, la série sera convergente. Pour cela, il est évidemment nécessaire et suffisant que les deux séries partielles

$$u_0+\ldots+u_n+\ldots \quad \text{et} \quad u_{-1}+\ldots+u_{-m}+\ldots$$

soient convergentes séparément.

La série (12) sera absolument convergente si ces deux séries le sont. On pourra, dans ce cas, altérer à volonté l'ordre des termes sans changer la somme de la série; les écrire, par exemple, dans l'ordre suivant

$$u_0+u_1+u_{-1}+\ldots+u_n+u_{-n}+\ldots,$$

de manière à n'avoir plus qu'une série ordinaire.

Pour former le produit de deux séries de l'espèce (12), lorsqu'elles sont absolument convergentes, on n'aura évidemment qu'à former les produits de leurs termes deux à deux; les termes ainsi obtenus, écrits dans un ordre quelconque à la suite les uns des autres, formeront une nouvelle série, égale au produit cherché.

316. Séries multiples. — Soit $u_{m_1, m_2 \ldots}$ un système de quantités, distinguées les unes des autres au moyen de plusieurs indices $m_1, m_2, \ldots$, dont chacun peut prendre une infinité de valeurs entières (par exemple, toutes les valeurs entières et positives).

On peut, d'une infinité de manières, écrire ces termes à la suite les uns des autres et former ainsi une série où chaque terme figure à un rang déterminé, sans qu'aucun d'eux soit omis. (On peut, par exemple, en désignant par $e_1, e_2, \ldots$ une suite quelconque d'entiers croissants, écrire d'abord, dans l'ordre qu'on voudra, ceux des termes $u_{m_1, m_2 \ldots}$ en nombre limité, pour lesquels $|m_1| + |m_2| + \ldots \overline{\overline{<}}\, e_1$, puis ceux, en nombre limité, où cette somme est $> e_1$, mais $\overline{\overline{<}}\, e_2$, et ainsi de suite.)

Une série ainsi formée

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

dont les termes successifs ne sont autres que les nombres $u_{m_1, m_2 \ldots}$ écrits dans un certain ordre, représentera pour nous, si elle est convergente, une valeur de la *série multiple*

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots} u_{m_1, m_2 \ldots}.$$

Toutes les séries V se déduisant de l'une d'elles V′ par le changement de l'ordre de ses termes, on voit (**291-292**) que, si V′ est semi-convergente, la série multiple admet une infinité de valeurs différentes. Le symbole $\Sigma u_{m_1, m_2 \ldots}$ n'acquerra donc un sens précis que lorsqu'on aura fixé l'ordre dans lequel les termes devront être successivement ajoutés.

Au contraire, si V′ est absolument convergente, la série multiple n'aura qu'une valeur unique (**289**). Nous dirons, dans ce cas, qu'elle est absolument convergente. La série plus générale $\Sigma \alpha_{m_1, m_2 \ldots} u_{m_1, m_2 \ldots}$ le sera également, si les modules des multiplicateurs $\alpha_{m_1, m_2 \ldots}$ ne surpassent pas un nombre fixe (**297**). Enfin, on obtiendra le produit de deux semblables

séries en multipliant leurs termes deux à deux et ajoutant dans un ordre quelconque les produits ainsi obtenus.

317. Considérons en particulier la série à termes réels et positifs

$$(13) \qquad S = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha}$$

(où l'on exclut le terme correspondant à $m_1 = m_2 \ldots = m_n = 0$, qui serait infini), et cherchons dans quel cas elle sera convergente.

Soit x un entier positif quelconque. Le nombre des systèmes de valeurs de $m_1, \ldots, m_n$ dont la valeur absolue ne surpasse pas x est évidemment égal à $(2x+1)^n$. Si nous excluons ceux de ces systèmes où $m_1, \ldots, m_n$ sont tous $< x$ en valeur absolue, il en restera

$$(2x+1)^n - (2x-1)^n = n2^n x^{n-1} + \ldots.$$

Soit S_x l'ensemble des termes de S qui correspondent aux systèmes restants. Chacun de ces termes est évidemment compris entre les deux limites suivantes $\frac{1}{x^{2\alpha}}$ et $\frac{1}{(nx^2)^\alpha}$; on aura donc

$$\frac{n2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}} \overset{=}{>} S_x \overset{=}{>} \frac{1}{n^\alpha} \frac{n2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}}.$$

On a d'ailleurs, évidemment,

$$S = S_1 + \ldots + S_x + \ldots$$

et, par suite,

$$T \overset{=}{>} S \overset{=}{>} \frac{1}{n^\alpha} T,$$

en posant, pour abréger,

$$T = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{n2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}}.$$

S sera donc convergente ou divergente en même temps que T.

Mais on peut évidemment écrire

$$T = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{A_n}{x^{2\alpha-n+1}},$$

A_n tendant pour $x = \infty$ vers la limite constante $n2^n$. Pour que T soit convergent, il sera nécessaire et suffisant que la série

$$\sum \frac{1}{x^{2\alpha-n+1}}$$

le soit, ce qui donne (306) la condition

$$2\alpha > n.$$

318. Ce résultat peut être généralisé comme il suit :

Soient φ une fonction continue homogène de degré 2α des indices $m_1, \ldots, m_n$; ψ une fonction des mêmes indices, de degré inférieur à 2α.

Si la fonction φ est de telle nature qu'elle ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles des variables $m_1, m_2, \ldots$ (le système o, o, … excepté), la série

$$\sum \frac{1}{\varphi + \psi}$$

(où l'on exclut de la sommation les termes pour lesquels on aurait $\varphi + \psi = 0$) sera convergente si $\alpha > \frac{n}{2}$, divergente si $\alpha \leqq \frac{n}{2}$.

En effet, donnons successivement aux variables $m_1, m_2, \ldots$ tous les systèmes de valeurs réelles qui satisfont à la condition

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots = 1.$$

Les valeurs correspondantes de φ seront évidemment finies et de même signe, car φ ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant.

Soient K la plus grande de ces valeurs, k la plus petite. Le rapport des fonctions φ et $(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha$ restera com-

pris entre K et k pour tous les systèmes de valeurs que l'on considère. D'ailleurs ce rapport, étant une fonction homogène et de degré zéro de $m_1, \ldots, m_n$, ne dépend que des rapports mutuels de ces quantités; il sera donc toujours compris entre K et k.

D'autre part, ψ étant de degré $< 2\alpha$ par rapport à $m_1, \ldots, m_n$, son rapport à $(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha$ tendra vers zéro si les variables $m_1, \ldots, m_n$, ou seulement quelques-unes d'entre elles, croissent indéfiniment; car ce rapport est moindre que $\frac{\psi}{m_\rho^{2\alpha}}$, m_ρ désignant la plus grande en valeur absolue des quantités $m_1, \ldots, m_n$, et ce dernier rapport tend évidemment vers zéro.

On aura donc

$$\varphi + \psi = A_{m_1 \ldots m_n}(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha,$$

$A_{m_1 \ldots m_n}$ étant une quantité finie, comprise pour des valeurs suffisamment grandes des variables entre deux limites fixes, voisines de K et de k. La série $\sum \frac{1}{\varphi + \psi}$ sera donc convergente ou divergente en même temps que la série S, considérée tout à l'heure.

319. Comme application, considérons la série

$$S_\alpha = \frac{1}{(2\omega_1 m_1 + 2\omega_2 m_2 + z)^\alpha},$$

où $2\omega_1 = a' + a''i$, $2\omega_2 = b' + b''i$, $z = z' + z''i$ sont des quantités complexes et α une quantité positive. La série des modules a pour terme général

$$\frac{1}{[(a'm_1 + b'm_2 + z')^2 + (a''m_1 + b''m_2 + z'')^2]^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\varphi + \psi},$$

en posant

$$\varphi = [(a'm_1 + b'm_2)^2 + (a''m_1 + b''m_2)^2]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

La fonction φ est continue et homogène de degré α. Enfin, elle ne s'annulera que si $m_1 = m_2 = 0$, pourvu que le déterminant $a'b'' - b'a''$ soit différent de zéro.

On voit donc, en appliquant le théorème précédent, que la série sera absolument convergente si $\alpha > 2$. Elle sera divergente, ou semi-convergente, si $\alpha \leqq 2$.

320. Produits infinis. — Soient, comme précédemment,

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

une suite indéfinie de quantités. Formons les produits successifs

$$\begin{aligned} &\Pi_1 = u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &\Pi_n = u_1 u_2 \ldots u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si n augmente indéfiniment, il peut se faire :

1° Que ces produits successifs ne tendent vers aucune limite déterminée;

2° Qu'ils tendent vers ∞;

3° Qu'ils tendent vers une limite finie Π.

On dira, dans ce dernier cas, que le produit infini

$$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

est *convergent* et a pour valeur Π.

321. Nous admettrons, pour plus de généralité, que $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ puissent être complexes. Soit, en général,

$$u_n = a_n + b_n i = \rho_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n).$$

Le produit Π_n aura pour module $\rho_1 \ldots \rho_n$ et pour argument $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Deux cas de convergence seront à distinguer suivant que, pour $n = \infty$, Π_n tend vers zéro ou vers une limite différente de zéro.

Le premier cas se présentera, quels que soient les arguments, si l'on a

$$\lim \rho_1 \ldots \rho_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim \operatorname{Log} \rho_1 \ldots \rho_n = \lim (\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n) = -\infty.$$

Ce cas se reconnaîtra donc à ce caractère que la série

$$\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n + \ldots$$

est divergente et a pour limite $-\infty$.

322. Supposons, au contraire, que Π_n tende vers une quantité fixe différente de zéro, ayant P pour module et A pour l'un de ses arguments. Il faudra évidemment pour cela que l'on ait

$$\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n = \operatorname{Log} P + R_n,$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = A + 2 k_n \pi + R'_n,$$

k_n étant un entier et R_n, R'_n des quantités qui tendent vers zéro pour $n = \infty$. D'ailleurs les arguments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n'étant déterminés chacun qu'aux multiples près de 2π, pourront être choisis successivement de manière à faire évanouir les entiers k_n, de sorte que les deux séries

$$(14) \qquad \operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n + \ldots,$$
$$(15) \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

soient convergentes (leurs sommes étant Log P et A).

Au lieu de la série (14), il sera souvent plus commode de considérer la série

$$(16) \qquad \operatorname{Log} \rho_1^2 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n^2 + \ldots,$$

qui s'obtient en doublant tous ses termes.

Si les séries (15) et (16) sont absolument convergentes, il en sera de même du produit Π, dont la valeur sera évidemment indépendante de l'ordre des facteurs. Il en dépendra, au contraire, et sera semi-convergent, si l'une ou l'autre des deux séries est semi-convergente.

Une condition nécessaire, sinon suffisante, pour la convergence des séries ci-dessus est que leurs termes tendent vers zéro pour $n = \infty$. Il faut pour cela que ρ_n^2 tende vers l'unité et α_n vers zéro. Mais on a

$$\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \qquad \alpha_n = \text{arc} \begin{cases} \sin \dfrac{b_n}{\rho_n} \\ \cos \dfrac{a_n}{\rho_n}. \end{cases}$$

Il faudra donc que a_n tende vers l'unité et b_n vers zéro.

323. Théorème. — *Pour que le produit*

$$\Pi = u_1 \ldots u_n \ldots$$

soit absolument convergent vers une limite différente de zéro, il faut et il suffit que la série

$$s = (u_1 - 1) + \ldots + (u_n - 1) + \ldots$$

soit absolument convergente.

En effet, la convergence de cette série, comme celle du produit, exige évidemment que l'on ait

$$\lim a_n = 1, \qquad \lim b_n = 0, \qquad \lim \rho_n = 1.$$

Cela posé, les expressions

$$\frac{\operatorname{Log} \rho_n^2}{\rho_n^2 - 1} = \frac{\operatorname{Log}(1 + \rho_n^2 - 1)}{\rho_n^2 - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}(\rho_n^2 - 1) - \ldots$$

et

$$\frac{\alpha_n}{b_n} = \frac{\text{arc}\sin \dfrac{b_n}{\rho_n}}{b_n}$$

tendront évidemment vers l'unité pour $n = \infty$. Ces facteurs seront donc, à partir d'un certain rang, inférieurs à une limite fixe, et il en sera de même de leurs inverses. Donc les séries (14) et (15) seront absolument convergentes en même temps que les séries plus simples

$$\sum \frac{\rho_n^2 - 1}{\operatorname{Log} \rho_n^2} \operatorname{Log} \rho_n^2 = \sum (\rho_n^2 - 1) = \sum (a_n^2 + b_n^2 - 1)$$

et

$$\sum \frac{b_n}{\alpha_n} \alpha_n = \sum b_n.$$

Mais si la série $\sum b_n$ est absolument convergente, il en sera de même de la série $\sum b_n^2$, dont les termes ont des modules moindres, au moins à partir d'un certain rang. D'autre part, la série $\sum (a_n^2 - 1)$ peut s'écrire

$$\sum (a_n + 1)(a_n - 1)$$

et sera absolument convergente en même temps que la série $\sum (a_n - 1)$, puisque le facteur $a_n + 1$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite fixe égale à 2. Donc, pour que Π soit absolument convergent, il faut et il suffit que les deux séries

$$\sum (a_n - 1) \quad \text{et} \quad \sum b_n$$

soient absolument convergentes, ou, ce qui revient au même, que la série

$$\sum (a_n - 1 + b_n i) = \sum (u_n - 1)$$

le soit.

324. Considérons, comme exemple, le produit

$$\Pi = \left(1 + \frac{A_1}{1^\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{A_n}{n^\alpha}\right) \cdots.$$

Il sera absolument convergent si, α étant > 1, les coefficients $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ ont leurs modules inférieurs à une limite fixe M. On aura, en effet,

$$\sum |u_n - 1| = \sum \frac{|A_n|}{n^\alpha} < M \sum \frac{1}{n^\alpha},$$

et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, comme nous l'avons vu.

Le contraire aura lieu si $\alpha \overline{\underset{<}{=}} 1$ et si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ ont leurs modules supérieurs à une limite fixe.

325. Comme application, considérons l'expression

$$\Pi(n, z) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} n^z.$$

Soit $\Gamma(z)$ la limite vers laquelle elle tend pour $n = \infty$. On aura évidemment $\Gamma(z) = \infty$ si z est un entier négatif, car, à partir de la valeur $n = -z+1$, toutes les fonctions $\Pi(n, z)$ auront un facteur nul au dénominateur.

Pour toute autre valeur de z, $\Gamma(z)$ aura, au contraire, une valeur finie et déterminée. En effet, on peut évidemment écrire

$$\Gamma(z) = \Pi(2, z) \frac{\Pi(3, z)}{\Pi(2, z)} \cdots \frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)} \cdots,$$

et il ne reste qu'à prouver la convergence de ce produit infini.

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)} &= \frac{n}{n+z} \frac{(n+1)^z}{n^z} \\ &= 1 + \frac{z(z-1)}{2n^2} + \ldots = 1 + \frac{A_n}{n^2},\end{aligned}$$

A_n tendant, pour $n = \infty$, vers la limite fixe $\frac{z(z-1)}{2}$. Le produit est donc absolument convergent.

326. On a parfois à considérer des produits infinis dans les deux sens ou des produits multiples. Leur introduction ne peut plus offrir aucune difficulté.

IV. — Séries de fonctions.

327. Si une série

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions d'une ou plusieurs va-

riables $x, y, \ldots$ est convergente pour tous les systèmes de valeurs de ces variables constituant un certain domaine, elle représentera dans ce domaine une fonction de $x, y, \ldots$.

La convergence de la série sera uniforme, si l'on peut, quelle que soit la quantité positive ε, déterminer un entier ν, indépendant de $x, y, \ldots$ et tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$|s - s_n| < \varepsilon.$$

Les séries uniformément convergentes peuvent, à beaucoup d'égards, être assimilées aux sommes formées d'un nombre limité de termes, ainsi que le montrent les théorèmes suivants :

328. Théorème I. — *Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions continues de x, $y, \ldots$, est elle-même une fonction continue.*

Posons, en effet,

$$s = s_n + R.$$

Changeons $x, y, \ldots$ en $x + \Delta x$, $y + \Delta y, \ldots$; soient Δs, Δs_n, ΔR les accroissements correspondants de s, s_n, R ; on aura

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R = \Delta s_n + R + \Delta R - R;$$

d'où

$$|\Delta s| \overline{\overline{<}} |\Delta s_n| + |R + \Delta R| - |R|.$$

La continuité étant supposée uniforme, on pourra prendre n assez grand pour que $|R + \Delta R|$ et $|R|$ soient moindres qu'une quantité positive quelconque $\frac{\varepsilon}{3}$.

Le nombre n ayant été ainsi choisi, s_n, qui est la somme d'un nombre fini de fonctions continues, sera continue. On pourra donc assigner une quantité δ, telle que si $|\Delta x|$, $|\Delta y|, \ldots$ sont $< \delta$, $|\Delta s_n|$ soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. On aura alors

$$|\Delta s| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de s.

329. THÉORÈME II. — *Une série uniformément convergente*

$$s = u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et dont les termes sont des fonctions intégrables dans un domaine borné E, *est elle-même intégrable dans ce domaine; elle a pour intégrale la série*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_1\, de + \ldots + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_n\, de + \ldots.$$

laquelle sera uniformément convergente.

En effet, décomposons E en éléments infiniment petits $de_1, \ldots, de_k, \ldots$. Soit O_k l'oscillation de s dans l'élément de_k. Il faut prouver que $\Sigma O_k\, de_k$ tend vers zéro en même temps que l'étendue des éléments.

Posons encore

$$s = s_n + R,$$

et soient O'_k, ω_k les oscillations de s_n et de R dans l'élément de_k. On aura évidemment

$$O_k \overline{\overline{<}} O'_k + \omega_k,$$

d'où

$$\Sigma O_k\, de_k \overline{\overline{<}} \Sigma O'_k\, de_k + \Sigma \omega_k\, de_k.$$

On peut, par hypothèse, prendre n assez grand pour que R soit constamment moindre en valeur absolue qu'une quantité positive quelconque ε. Son oscillation ω_k sera dès lors moindre que 2ε, et l'on aura

$$\Sigma \omega_k\, de_k < 2\varepsilon \Sigma\, de_k < 2\varepsilon \mathrm{E}.$$

Le nombre n étant ainsi choisi, s_n étant la somme d'un nombre fini de fonctions intégrables sera intégrable ; on pourra donc assigner une quantité δ, telle que si $de_1, \ldots, de_k$ sont tous $< \delta$, $\Sigma O'_k\, de_k$ soit $< \varepsilon$. On aura alors

$$\Sigma O_k\, \Delta x_k < \varepsilon(2\mathrm{E} + 1),$$

quantité qui tend vers zéro avec ε; donc s est intégrable.

Son intégrale sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathrm{E}} s\,de &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} s_n\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de \\ &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} s_1\,de + \ldots + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} s_n\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que, si n tend vers ∞, $\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de$ tend vers zéro, et cela uniformément.

Or, on peut, par hypothèse, déterminer un entier ν tel que, si $n > \nu$, $|\mathrm{R}|$ soit constamment moindre qu'un nombre positif quelconque ε. Mais alors

$$\left|\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de\right| \leqq \varepsilon \mathrm{E},$$

quantité qui tend vers zéro avec ε.

330. Théorème III. — *Si la série*

$$s(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est convergente, et la série

$$\sigma(x) = f_1'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$$

uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine E; *si, de plus, les fonctions* $f_1'(x), \ldots, f_n'(x), \ldots$ *sont continues dans l'intérieur de* E', $s(x)$ *admettra dans l'intérieur de* E *une dérivée, égale à* $\sigma(x)$.

Soient, en effet, x un point quelconque intérieur à E; a un autre point, assez voisin de x pour que tous les points de l'intervalle ax soient encore intérieurs à E; $\sigma(x)$ sera intégrable de a à x; et l'on aura

$$\begin{aligned}\int_a^x \sigma(t)\,dt &= \int_a^x f_1'(t)\,dt + \ldots + \int_a^x f_n'(t)\,dt + \ldots \\ &= f_1(x) - f_1(a) + \ldots + f_n(x) - f_n(a) + \ldots \\ &= s(x) - s(a).\end{aligned}$$